Учебно-методическое пособие по выполнению

внеаудиторных самостоятельных работ

учебной дисциплины Математика

образовательной программы

по профессиям и специальностям СПО

15.01.05 **Сварщик** (**электросварочные и газосварочные работы**)

190631.01 **Автомеханик**

26 08 07.01 **Повар**, **кондитер**

100116.01 **Парикмахер**

46.02.01 **Документационное обеспечение управления и архивоведение**

Байкальск, 2018 г.

Методические рекомендации по организации **внеаудиторных самостоятельных работ студентов** образовательной программы по профессиям и специальностям СПО

15.01.05 Сварщик (электросварочные и газосварочные работы)

13.01.10 Электромонтер

190631.01 Автомеханик

26 08 07.01Повар, кондитер

100116.01 Парикмахер

46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

являются частью основной программы.

Организация-разработчик: *ГАПОУ БТОТиС*

Разработчик: *С.И.Константинова, преподаватель ГАПОУ БТОТиС*

Методические рекомендации по организации внеаудиторных самостоятельных работ студентов одобрены ЦК общеобразовательного блока ГАПОУ БТОТиС протокол №___«_____»_________ 20 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Самостоятельная работа студентов является неотъемлемой частью обучения. В подготовке специалистов решающим условием является не только усвоение им конкретной суммы знаний, но и выработка умений самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в потоке информации.

В ходе изучения дисциплины «Математика» на самостоятельную работу студентов отведено50% от максимальной нагрузки. Рабочей программой по математике предусмотрены различные формы и методы выполнения самостоятельной работы.

Использование самостоятельной работы студентов позволит добиться глубоких и прочных знаний, способствует активизации познавательной деятельности, развивает умение самостоятельно приобретать знания.

1. Оценка результатов выполнения внеаудиторных самостоятельных работ студентов

Внеаудиторные самостоятельные работы студентов разработаны на основании Положения о планировании и организации самостоятельной работы обучающихся ГАПОУ БТОТиС

Разработанное пособие по организации внеаудиторной самостоятельной работе студентов по специальности НПО **190631.01 Автомеханик; 26 08 07.01 Повар, кондитер; 15.01.05. Сварщик (электросварочные и газосварочные работы);100116.01 Парикмахер** содержит основные требования к практическому опыту, умениям и знаниям, перечисленным в тексте Федерального государственного образовательного стандарта.

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС, направленные на формирование общих и профессиональных компетенций.

Оценка результатов выполнения самостоятельных работ студентов осуществляется по накопительной системе. Накопительная система оценки знаний студентов предполагает непрерывное участие студентов во всех видах самостоятельных работ. Каждый вид деятельности студента оценивается из определенного количества баллов. Набранные баллы суммируются и приводятся к 5-бальной шкале.

Оценка самостоятельных работ студентов осуществляется следующим образом:

Перевод в 5- балльную шкалу

Отношение набранной суммы баллов к максимально возможной	Оценка по 5-балльной шкале
90% и более	5
75-89%	4
60-74%	3
Если хотя бы одна из работ оценена на «2»	2

Оценка внеаудиторных самостоятельных работ

Критерии оценок

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 91% -100% предлагаемых заданий, допустим 2 недочета, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 81% -90% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% -80% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

2. **Наименование разделов внеаудиторной самостоятельной работы**

№	Наименование раздела, темы	Кол-во часов
1	***Самостоятельная работа №1*** «Развитие понятия о числе»»	8
2	***Самостоятельная работа №2*** **«**Корни, степени и логарифмы**»**	18
3	***Самостоятельная работа №3*** **«**Прямые и плоскости в пространстве**»**	12
4	***Самостоятельная работа №4*** «Комбинаторика, статистика»	6
1	***Самостоятельная работа №5*** «Координаты и векторы»	12
2	***Самостоятельная работа №6*** **«**Основы тригонометрии**»**	20
3	***Самостоятельная работа №7*** «Функции их свойства и графики. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции»	12
1	***Самостоятельная работа №8*** **«**Многогранники**»**	15
2	***Самостоятельная работа №9*** **«**Тела и поверхности вращения**»**	5
3	***Самостоятельная работа №10*** **«**Начала математического анализа**»**	20
4	***Самостоятельная работа №11*** «Измерения в геометрии»	8
5	***Самостоятельная работа 12*** **«**Элементы теории вероятностей.Элементы математической статистики**»**	6
6	***Самостоятельная работа №13*** **«**Уравнения и неравенства**»**	10

Пояснения к самостоятельным работам студентов

Самостоятельная работа №1 (8 час)

Абсолютная и относительная погрешности. Вычисления погрешности округления..

Цели: научиться определять абсолютную и относительную погрешности числа; научиться определять верные значащие цифры числа; научиться определять погрешности функций формировать умение графического изображения комплексных чисел, выполнения арифметических операций с комплексными числами.

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал

Понятие погрешности числа

Разность точного и приближенного значений величины называется *погрешностью приближения (*обозначается Δx),

т.е. $\Delta x = x - a$ - **погрешность приближения**

откуда $x = a + \Delta x$,

т.е. истинное значение равно сумме приближенного значения и погрешности приближения.

Модуль разности точного и приближенного значений величины называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа *x*.

т.е. $|x-a| = |\Delta x|$ **-абсолютная погрешность приближения.**

Запись x= $a \pm h$ *означает, что истинное значение величины x заключено между границами, т.е.* $a - h \le x \le a + h$

Пример 1. На предприятии 1284рабочих и служащих. При округлении этого числа до 1300 абсолютная погрешность составляет 1300 -1284 = 16. При округлении до 1280 абсолютная погрешность составляет 1284 - 1280 = 4.

Пример 2. Даны приближенные значения числа x=$\frac{2}{3}$; $\alpha_1 = 0{,}6$; $\alpha_2 = 0{,}66$; $\alpha_3 = 0{,}67$. Какое из этих трех приближений является лучшим?

Решение:

Находим $\Delta x_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{15}$; $\Delta x_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150}$;

$\Delta x = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300}$; Лучшим приближением числа *x* является $\alpha_3 = 0{,}67$.

Пример 3. Длина детали *x (см)* заключена в границах $33 \le x \le 34$. Найти границу абсолютной погрешности измерения детали.

Решение: Примем за приближенное значение длины детали среднее арифметическое границ: a=(33+34)/2 = 33,5 (см).

Тогда граница абсолютной погрешности приближенного значения длины детали не превзойдет 0,5 (см). Величину Δa можно найти и как полуразность верхней и нижней границ, т.е. Δa = (34-33)/2 = 0,5 (см). Длина детали *x*, найденная с точностью до Δa =0,5 (см), заключена между приближенными значениями числа *x*:

$33{,}5-0{,}5 \le x \le 33{,}5+0{,}5$;

$x=33{,}5 \pm 0{,}5$ (см).

Отношение абсолютной погрешности приближения к модулю приближенного значения величины называется *относительной погрешностью* приближения и обозначается δ.

Т.е.

$$\frac{|\Delta x|}{|a|} = \frac{|x-a|}{|a|} = \delta$$ является относительной погрешностью приближения

Пример 1. При измерении длины *L* и диаметра проводника получили *L*=(10,0 ± 0,1) м, *d* = (2,5 ± 0,1) мм. Какое из этих измерений точнее?

Решение: Измерение длины проводника производилось с точностью до 0,1м=100мм, а измерение диаметра проводника – с точностью до 0,1мм.

При измерении длины проводника допускается абсолютная погрешность в 100мм на 10000мм, и, следовательно, допустимая абсолютная погрешность составляет

$\frac{100}{10000} = 0{,}01 = 1\%$ измеряемой величины.

При измерении диаметра допустимая абсолютная погрешность составляет

$\frac{0{,}1}{2{,}5} = 0{,}04 = 4\%$ измеряемой величины. Следовательно, измерение длины проводника выполнено точнее.

Пример 2. Известно, что 0,111 является приближенным значением для $\frac{1}{9.}$ Найти абсолютную и относительную погрешности этого приближения.

Решение: Здесь $x=\frac{1}{9}$, a=0,111. Тогда Δx = x-*a* = 1/9 – 0,111 = 1/9000-а.п.п,

$\frac{\Delta x}{a} = \frac{1}{9000} . \frac{1}{0{,}111} = \frac{1}{999}$ -о.п.п

Пример 3. В школе 197 учащихся. Округляем это число до 200. Абсолютная погрешность составляет 200-197 = 3. Относительная погрешность равна $\frac{3}{197}$ или, округленно, $\frac{3}{200} = 1{,}5\%$.

В большинстве случаев невозможно узнать точное значение приближенного числа, а значит, и точную величину погрешности. Однако почти всегда можно установить, что погрешность (абсолютная или относительная) не превосходит некоторого числа.

Пример 4.

Продавец взвешивает арбуз на чашечных весах. В наборе гирь наименьшая— 50 г. Взвешивание дало 3600 г. Это число — приближенное. Точная масса арбуза неизвестна. Но абсолютная погрешность не превышает 50 г. Относительная погрешность не превосходит $\frac{50}{3600} \approx 1{,}4\%$.

Комплексные числа.
Графическое изображение комплексных чисел.

Изображение комплексных чисел.

Комплексные числа записываются в виде: $a+bi$. Здесь a и b – *действительные числа,* а i – *мнимая единица,* *т.е.* $i^2 = -1$. Число a называется *абсциссой,* а b – *ординатой* комплексного числа $a+bi$. Комплексное число $0+bi$ называется *чисто мнимым числом.* Запись bi означает то же самое, что и $0+bi$.

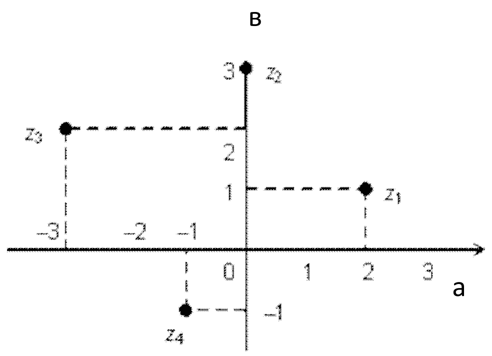
Модулем комплексного числа называется длина вектора *OP,* изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости. Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль

Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy . Каждому комплексному числу z = a + bi можно сопоставить точку с координатами (a;b) , и наоборот, каждой точке с координатами (c;d) можно сопоставить комплексное число w = c + di . Таким образом, между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексные числа можно изображать как точки плоскости. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, обычно называют комплексной плоскостью.

Пример. Изобразим на комплексной плоскости числа

$Z_1 = 2 + i$; $z_2 = 3i$; $z_3 = -3 + 2i$; $z_4 = -1 - i$.

Решение:



Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$, а умножение — по правилу $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (здесь как раз используется, что $i^2 = -1$). Число $\bar{z} = a - bi$ называется *комплексно-сопряженным* к $z = a + bi$. Равенство $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Например, $\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$

Задачи для самостоятельного решения по теме:

«Развитие понятия о числе»

1 ВАРИАНТ

1. Запишите число в стандартном виде:
   а)730000000; б)0,0000025;

   в)$0,24 \cdot 10^{-3}$; г)$75,2 \cdot 10^{4}$.

2. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной периодической дроби:
   а) $\frac{13}{15}$; б) $\frac{35}{111}$.
3. Вычислите:
   $$i^{8}+i^{40}+i^{30}+2i^{2}-i^{52}.$$
4. Найдите сопряжённое число комплексному числу:
   z= 4 + 5i.
5. Обратите чистые периодические десятичные дроби в обыкновенные:
   а) 0,(42); б) 0,(513).
6. Обратите смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные дроби:
   а) 0,0(27); б) 0,0(01).

7. Даны числа $z_1= - 1 +3\,i$, $z_2= 4 + 5i$. Вычислите:

а) модули чисел z_1 и z_2;

б) сумму чисел z_1 и z_2;

в) разность чисел z_1 и z_2;

г) произведение чисел z_1 и z_2.

8. Постройте комплексные числа в координатной плоскости:

$z_1= - 1 +3i$, $z_2= 4 + 5i$.

9. Найдите значение дроби:

$$\frac{12{,}8:0{,}64+3{,}05:0{,}05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$$

2 ВАРИАНТ

1. Запишите число в стандартном виде:
   а) 37000000; б)0,00000052;

   в) $0,42*10^{-4}$; г)$52,7*10^{5}$.

2. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной периодической дроби:

а) $\frac{3}{11}$; б) $\frac{95}{333}$.

3. Вычислите:

$$2i^{6}+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}.$$

4. Найдите сопряжённое число комплексному числу:

z= 4 -7i.

5. Обратите чистые периодические десятичные дроби в обыкновенные:

а) 0,(72); б) 0,(918).

6. Обратите смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные дроби:

а) 0,3(6); б) 0,11(6).

7. Даны числа z_1= - 3 +5i, z_2= 4 -7i. Вычислите:

а) модули чисел z_1 и z_2 ;

б) сумму чисел z_1 и z_2;

в) разность чисел z_1 и z_2;

г) произведение чисел z_1 и z_2.

8. Постройте комплексные числа в координатной плоскости:

z_1= - 3 + 5i, z_2= 4 -7i.

9. Найдите значение дроби:

$$\frac{203,4:9-(5,39-7,39)}{\frac{3}{14}*\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}$$

Критерии оценки самостоятельной работы №1

Задания	Баллы	Примечание
1, 2, 3, 4	8	Каждый правильный ответ 1 балл
5, 6, 7	18	Каждый правильный ответ 2 балла
8, 9	9	Каждый правильный ответ 3 балла

Максимальный балл за работу **– 35 баллов**

Шкала перевода баллов в отметки

Отметка	**Число баллов, необходимое для получения отметки**
« **5**» (отлично)	33– 35
« **4**» (хорошо)	27 – 32
« **3**» (удовлетворительно)	18 – 26
« **2** « (неудовлетворительно)	менее 18

Самостоятельная работа №2 (18 час)

Корни натуральной степени из числа и их свойства.

Степень с рациональным показателем.

Цель работы: отрабатывать умение преобразования выражений, содержащих радикалы, на конкретных примерах научиться выполнять действия над степеням, решать иррациональные уравнения и неравенства, уметь решать показательные уравнения, уметь вычислять простые логарифмы, решать логарифмические уравнения

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения и контрольных вопросов. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1.Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2.Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетрадь.

Ход работы.
Теоретический материал.

Основные свойства корней

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

$1^0.\ \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$

$2^0.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0).$

$3^0.\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}\ (k>0).$

$4^0.\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}\ (k>0).$

$5^0.\ \sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\leqslant 0$, то $a\neq 0$).

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625		
	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936			
	1	7	49	343	2401	16807	117649				
	1	8	64	512	4096	32768					
	1	9	81	729	6561	59049					
	1	10	100	1000	10000						

Примеры решения упражнений:

№1

Вычислить:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$;

Решение:

а) $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$; б) $\sqrt[4]{16}=2$;

в) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{1}{2}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}}=\frac{3}{5}$.

№2

Решите уравнение

а)$x^6=5$; б) $x^3=5$;

Решение:

а) $x^6=5$;

так как 6- четное число, то уравнение имеет два корня

$x=\pm\sqrt[6]{5}.$

Ответ: $\pm\sqrt[6]{5}$.

б) $x^3=5$;

так как 3-нечетное число, то уравнение имеет один корень.

$x=\sqrt[3]{5}$.

Ответ: $\sqrt[3]{5}$.

Для арифметического корня n-й степени, как и для квадратного корня, существуют операции внесения множителя под знак корня и вынесение множителя из-под знака корня.

Например :

$2\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{2^3a}=\sqrt[3]{8a}$.

Из примера видно, что для внесения множителя под знак корня n-й степени его нужно

возвести в n-ю степень. Нужно помнить, что под знак с четным показателем мы имеем право внести только положительный множитель, например:

$-a^3\sqrt[4]{3в}=-\sqrt[4]{\left(a^3\right)^4\cdot 3в}=-\sqrt[4]{3a^{12}в}.$

Аналогично производится вынесение множителя из-под знака корня , например:

а)$\sqrt[3]{27a^2}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{a^2}=3\sqrt[3]{a^2}$;

б)$\sqrt{5a^6c}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^6}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{5c}\cdot\sqrt{\left(a^3\right)^2}=\sqrt{5c}\cdot|a|^3$;

в) $\sqrt[3]{54a^{10}} = \sqrt[3]{27\cdot 2\cdot a^9 a} = \sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[3]{\left(a^3\right)^3} = 3a^3\sqrt[3]{2a}$;

Выполнение действий над степенями

Правила действий с корнями и степенями

$a^0=1;\ a\neq 0$, пример: $2^0=1$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n};\ a\neq 0$, пример: $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$; $n\neq 0;\ a>0$, пример: $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=4$

$a^n\cdot a^m=a^{(n+m)}$, пример: $2^3\cdot 2^{14}=2^{(3+14)}=2^{17}$

$(a^n)^m=(a)^{(n\cdot m)}$, пример: $(2^3)^{14}=(2)^{(3\cdot 14)}=2^{42}$

$\frac{a^m}{a^n}=a^{(m-n)};\ a\neq 0$, пример: $\frac{2^{14}}{2^3}=2^{(14-3)}=2^{11}$

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ a>0;b>0;\ n\in N$, пример: $\sqrt[3]{8\cdot 27}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=6$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ a>0;b>0;\ n\in N$, пример: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$

$\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m};\ n,m\in N$, пример: $\sqrt[6]{2^9}==\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

Иррациональные уравнения.

Иррациональным называется уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня.

Решаются такие уравнения возведением обеих частей в степень. При возведении в четную степень возможно расширение области определения заданного уравнения. Поэтому при решении таких иррациональных уравнений обязательны проверка или нахождение области допустимых значений уравнений. При возведении в нечетную степень обеих частей иррационального уравнения область определения не меняется.

Иррациональные уравнения стандартного вида можно решить пользуясь следующим правилом:

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Решение иррациональных уравнений стандартного вида:

а) Решить уравнение $\sqrt{2x-1} = x - 2$,

Решение. $\sqrt{2x-1} = x - 2$,

$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$, Проверка:

$x^2 - 6x + 5 = 0$, $x = 5$, $\sqrt{2\times5-1} = 5 - 2$,

$x_1 = 5$, $3 = 3$

$x_2 = 1$ – постор. корень $x = 1$, $\sqrt{2\times1-1} \neq 1 - 2$,

Ответ: 5 *пост. к.* $1 \neq -1$.

б) Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2} = x + 4$,

Решение.

$\sqrt{6-4x-x^2} = x + 4$,

$$\begin{cases} 6-4x-x^2 = x^2+8x+16, \\ x+4 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+12x+10 = 0, \\ x \geq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 5 = 0, \\ x \geq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = -5 - пост.к. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: -1

в) Решить уравнение $x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1},$

Решение.

$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1},$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 1,$

$x^3 - 4x^2 + 4x = 0,$

$x(x^2 - 4x + 4) = 0,$

$x = 0$ или $x^2 - 4x + 4 = 0,$

$(x - 2)^2 = 0,$

$x = 2$

Ответ: 0; 2.

г) Решить уравнение $x - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0,$

Решение.

$x - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0,$

$x + 4 = 5\sqrt{x-2},$

$x^2 + 8x + 16 = 25x - 50,$

$x^2 - 17x + 66 = 0,$

$x_1 = 11,$

$x_2 = 6.$

Проверка:

$x = 11,$ $11 - 5\sqrt{11-2} + 4 = 0,$

$0 = 0$

$x = 6,$ $6 - 5\sqrt{6-2} + 4 = 0,$

$0 = 0.$

Ответ: 6; 11.

- Иррациональное уравнение, содержащее иррациональность четной степени:

Решить уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$

Решение.

$\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1,$ возведем обе части уравнения в квадрат

$3x-5-2\sqrt{(3x-5)(4-x)}+4-x=1,$

$2x-2=2\sqrt{(3x-5)(4-x)},$

$x-1=\sqrt{(3x-5)(4-x)},$

$x^2-2x+1=(3x-5)(4-x),$

$x^2-2x+1-12x+3x^2+20-5x=0,$

$4x^2-19x+21=0,$

Проверка:

$x=3, \quad \sqrt{9-5}-\sqrt{4-3}=1,$

$1=1.$

$x=1{,}75 \quad \sqrt{4{,}75-5}-\sqrt{4-1{,}75}\neq 1,$

$x_1=3$

$x_2=1{,}75$ *пост. корень*

Ответ: $x_1=3$

Показательные уравнения.

Пример 1

Решить уравнение:

Решение: Представим 64 как и перепишем заданное уравнение в виде: . Это уравнение равносильно уравнению: .

Ответ: x=5

Пример 2

Решить уравнение: ;

Решение: Преобразуем как и перепишем заданное уравнение в виде:

. Это уравнение равносильно уравнению:

откуда находим .

Ответ: x = 2

Уравнения, сводящиеся к квадратным (метод замены)

Пример 3

Решить уравнение: .

Решение: Заметив, что

Перепишем заданное уравнение в виде:

Вводим новую переменную: , тогда уравнение примет вид:

Решив квадратное уравнение, получим: 4, 6. Но так как , то надо решить два уравнения:

Решим первое уравнение:

Рассмотрим второе уравнение.
Второе уравнение не имеет решения, так как для любых значений x.
Ответ: 2

Метод выноса за скобки

Пример 4

Решить уравнение:

В левой части выносим за скобки степень с наименьшим показателем, то есть . В результате получим:

;

;

;

;

;

Ответ: x = 2.

4.1 Вынесение общего множителя за скобки.

Системы показательных уравнений

Пример 5
Решить систему.

Решение: Воспользуемся способом подстановки. Выразив из первого уравнения у, получим . Тогда или откуда . Следовательно, .
Ответ: .

Логарифмирование. Свойства логарифмов.

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b (числа **b, a – положительные, a≠ 1).**

Если $a^c = b$, то $\log_a b = c$

→ основное логарифмическое тождество

Свойства логарифмов

1. = c, a > 0, a ≠ 1, c > 0.
2. a > 0, a ≠ 1.
3. a > 0, a ≠ 1.
4. \+ a > 0, a ≠ 1,b > 0, c > 0.
5. = - a > 0, a ≠ 1,b > 0, c > 0.
6. = p * a> 0, a ≠ 1,b > 0.
7. = , a > 0, a ≠ 1,b > 0.
8. = a > 0, a ≠ 1,b > 0.
9. = , a > 0, a ≠ 1,b > 0, c > 0, c ≠ 1.

* = 1, a > 0, a ≠ 1,b > 0, b ≠1

1. **Примеры решения задач.**

Пример 1. Вычислить. $49^{0,5\log_7 9}$

Решение. $49^{0,5\log_7 9} = (7^2)^{0,5\log_7 9} = 7^{2\cdot 0,5\log_7 9} = 7^{\log_7 9} = 9$

Пример 2. Вычислить.

а) $\log_3 15 - \log_3 5 + 3^{\log_3 5}$

Решение. $\log_3 15 - \log_3 5 + 3^{\log_3 5} = \log_3 \frac{15}{3} + 5 = \log_3 3 + 5 = 1 + 5 = 6$

б) $\log_3 36 - 2\log_3 2 + \log_2 \frac{1}{4}$

Решение.

$$\log_3 36 - 2\log_3 2 + \log_2 \frac{1}{4} = \log_3 36 - \log_3 2^2 + \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_3 \frac{36}{4} + \log_2 2^{-2} = \log_3 9 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Пример 3. Упростить выражение. $3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5} + \log_4 \sqrt[5]{16}$

Решение.

$$3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5} + \lg \sqrt[5]{100} = 3^{\log_2 2^{-2}} \cdot 3^{\log_3 5} + \frac{1}{5}\lg 100 = 3^{-2} \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{1}{9} \cdot 5 + \frac{2}{5} = \frac{25+18}{45} = \frac{43}{45}$$

Пример 4. Вычислить. $\dfrac{\log_3 216}{\log_8 3} - \dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$

Решение.

$$\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} = \frac{\log_3 216}{\frac{\log_3 3}{\log_3 8}} - \frac{\log_3 24}{\frac{\log_3 3}{\log_3 72}} = \frac{\log_3 216}{\frac{1}{\log_3 8}} - \frac{\log_3 24}{\frac{1}{\log_3 72}} = \log_3 216 \cdot \log_3 8 - \log_3 24 \cdot \log_3 72 =$$

$$= \log_3(72 \cdot 3) \cdot \log_3 8 - \log_3(8 \cdot 3) \cdot \log_3 72 = (\log_3 72 + \log_3 3)\log_3 8 - (\log_3 8 + \log_3 3)\log_3 72 =$$
$$= (\log_3 72 + 1)\log_3 8 - (\log_3 8 + 1)\log_3 72 = \log_3 72 \cdot \log_3 8 + \log_3 8 - \log_3 72 \cdot \log_3 8 - \log_3 72 =$$
$$= \log_3 8 - \log_3 72 = \log_3 \frac{8}{72} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$$

Пример 5. Решить уравнение. $\log_6 x = 2\log_6 3 + 4\log_{36} 2$

$$\log_6 x = 2\log_6 3 + 4\log_{36} 2$$
$$\log_6 x = \log_6 3^2 + \log_{6^2} 2^4$$
$$\log_6 x = \log_6 9 + \frac{1}{2}\log_6 16$$
$$\log_6 x = \log_6 9 + \log_6 16^{\frac{1}{2}}$$
$$\log_6 x = \log_6 (9 \cdot 4)$$
$$\log_6 x = \log_6 36$$
$$\log_6 x = 2$$
$$x = 6^2$$
$$x = 36$$

Уравнения, содержащие неизвестную переменную под знаком логарифма, называются *логарифмическими уравнениями*.

Особенностью решения логарифмических уравнений является нахождение ОДЗ, связанное с определением логарифма: $\log_a b = x;\ a^x = b$. ОДЗ: $a > 0;\ a \neq 1$ (если a неизвестно), $b > 0$. При решении логарифмических уравнений нужно рассматривать систему, включающую в себя помимо самого уравнения ОДЗ.

Рассмотрим 3 типа логарифмических уравнений:

- уравнения, содержащие один логарифм; в основе решения лежит определение логарифма;
- уравнения, содержащие два логарифма и более; в основе решения лежит условие равенства логарифмов: $\log_a b = \log_c d \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ (логарифмы равны тогда и только тогда, когда равны их основания и выражения под знаками логарифма);
- уравнения, сводящиеся к квадратным алгебраическим; в основе решения лежит введение новой переменной, позволяющей преобразовать логарифмическое уравнение в квадратное алгебраическое

Рассмотрим решение нескольких примеров:

1. $\log_3(x+1)=4$

Это логарифмическое уравнение 1 типа. Используем определение логарифма:

$$\begin{cases} 3^4 = x+1 \\ x+1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=80 \\ x>-1 \end{cases}$$

Так как $80>-1$, то $x=80$ является ответом.

Ответ: 80.

2. $\log_2(5x+4)=\log_2(x+5)$

Это логарифмическое уравнение 2 типа. Используем условие равенства логарифмов:

$$\begin{cases} 5x+4=x+5 \\ 5x+4>0 \\ x+5>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x=1 \\ x>-0,8 \\ x>-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0,25 \\ x>-0,8 \end{cases}$$

Ответ: $0,25$.

3. $\log_3^2 x-\log_3 x-3=3$

Это логарифмическое уравнение 3 типа. Переносим все из правой части:

$\log_3^2 x-\log_3 x-6=0$

Пусть $t=\log_3 x$. Тогда:

$t^2-t-6=0$

$t_1=-2$

$t_2=3$

Перейдем к подстановке:

$\log_3 x=-2$

$$\begin{cases} x=3^{-2} \\ x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{9} \\ x>0 \end{cases}$$

$\log_3 x=3$

$$\begin{cases} x=3^3 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=27 \\ x>0 \end{cases}$$

Так как два корня удовлетворяют условию ОДЗ, то они оба входят в ответ.

Ответ: $\frac{1}{9}$; 27.

Задачи для самостоятельного решения

по теме: «КОРНИ, СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ»

№ 2-1

***Вариант** 1*	***Вариант** 2*
№ 1. Вычислить значения выражений:	
а) $\dfrac{26^9}{13^8\cdot 8^3}$	а) $\dfrac{12^9}{2^{15}\cdot 3^7}$
б) $\left(\left(6^{4/3}\right)^{3/2}+\left(0,25\right)^{-1}\right)\cdot\left(-0,5\right)^3$	б) $\left(\left(5^{8/7}\right)^{7/4}-\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{-3}}{32}\right)\cdot\left(46\right)^{-1}$
№ 2. Вычислить без помощи микрокалькулятора:	

а) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}} : \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$ б) $\sqrt[3]{\frac{23}{64} + \sqrt{\frac{5}{48^2 - 32^2}}}$	а) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$ б) $\sqrt{\frac{9}{16}\sqrt{\frac{33^2 - 25^2}{29}}}$
№ 3. Упростить выражения:	
а) $\frac{2n^2 + 11n + 14}{n+3} - 2n + \frac{1}{n+3}$ б) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$	а) $\frac{2a^2 + 5a - 12}{2a - 3} - a + 1$ б) $\frac{a}{a-b} + \frac{a^2 b + ab^2}{b^3 - a^3}$
№ 4. Вычислить логарифмы:	
а) $log_3 4 - 4log_3 2 + log_3 \frac{4}{9} + log_3 1$ б) $49^{\frac{1}{2} + log_7 2}$	а) $log_5 150 - log_5 3 + log_5 \frac{1}{2} - log_5 1$ б) $10^{2 - 3lg5}$
№ 5. Решить логарифмическое уравнение и неравенство:	
а) $log_2 \sqrt{x-1} = 1$ б) $log_5 (x+8) \le 2$	а) $log_{0,5}(x+5) = -2$ б) $log_4 (x+30) \le 3$

Вариант *3*	***Вариант*** *4*
№ 1. Вычислить значения выражений:	
а) $\frac{2 \cdot 7^{22} - 3 \cdot 7^{21}}{49^{10}}$ б) $\left(\left(5^{7/4}\right)^{8/7} - \frac{(2)^{-3}}{32} \right) \cdot (46)^{-1}$	а) $\frac{9^6 \cdot 4^3}{27^4 \cdot 2^5}$ б) $\left(2^{-\frac{1}{2}} \right)^{-8} - (0{,}125)^{-1} + \left(\sqrt{2}\right)^0$

№ 2. Вычислить без помощи микрокалькулятора:	
а) $\sqrt[4]{3^{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{8}}$	а) $\sqrt[10]{4^{30}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$
б) $\sqrt{90+\sqrt{\frac{31}{83}\left(57^2-26^2\right)}}$	б) $\sqrt{\frac{75}{4}\sqrt{\frac{228}{66^2-48^2}}}$
№ 3. Упростить выражения:	
а) $\frac{m^2-4m+5}{m-1}-\frac{2}{m-1}-m$	а) $\frac{3m^2-2m-1}{m}-3m+\frac{1}{m}$
б) $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a-b}$	б) $\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)}{a-b}$
№ 4. Вычислить логарифмы:	
а) $\sqrt{log_{16}4+log_{16}24-log_{16}6}$	а) $\frac{lg\,4}{lg64-lg8}$
б) $2^{3log_2 4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{log_{\frac{1}{2}}1}$	б) $5^{2log_5 3}+0{,}3^{log_{0,3}6}$
№ 5. Решить логарифмическое уравнение и неравенство:	
а) $log_{0,2}(x-3)=-1$	а) $log_{\frac{1}{2}}(x+5)=-2$
б) $log_3(4x+2)-log_3 10\le 0$	б) $log_5(x+13)<2$

Критерии оценки самостоятельной работы № 2-1

Отметка	**Количество примеров, необходимое для получения отметки**
« **5**» (отлично)	10
« **4**» (хорошо)	8-9
« **3**» (удовлетворительно)	7
« **2** « (неудовлетворительно)	менее 7

№ 2-2

Вариант 1

1. Решите уравнение: $\sqrt{4-3\tilde{o}} = 7$;
2. Решите уравнение: $2^x = 128$;
3. Решите уравнение: $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;
4. Решите неравенство: $5^{4x-7} > 1$;
5. Вычислите: $\log_2 16 - \log_8 64$;
6. Вычислите: $3^{\log_3 18} - \log_2 \log_3 81$;
7. Определите x, если $\log_4 x = -3$:
8. Решите неравенство: $\log_2(x-5) \geq 1$;
9. Решите уравнение: $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Вариант 2

1. Решите уравнение: $\sqrt{12+3x} = 2$;
2. Решите уравнение: $3^x = 81$;
3. Решите уравнение: $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$;
4. Решите неравенство: $2^{2x-9} < 1$;
5. Вычислите: $\log_3 27 - \log_9 81$;
6. Вычислите: $5^{\log_5 16} - \log_2 \log_4 16$;
7. Определите x, если $\log_3 x = -1$:
8. Решите неравенство: $\log_5 (5-2x) < 1$;
9. Решите уравнение: $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;

Вариант 3

1. Решите уравнение: $\sqrt{x+2} = 3$;
2. Решите уравнение: $5^x = 125$;
3. Решите уравнение: $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$;
4. Решите неравенство: $0{,}2^{3x-4} > 1$;
5. Вычислите: $\log_4 16 + \log_8 64$;
6. Вычислите: $3^{\log_3 18} - \log_3 \log_2 512$;
7. Определите x, если $\log_7 x = -2$:
8. Решите неравенство: $\log_2(x-1) > 3$;
9. Решите уравнение: $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$;

Вариант 4

1. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+5} = 3$;
2. Решите уравнение: $2^x = 256$;
3. Решите уравнение: $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 63$;
4. Решите неравенство: $0{,}7^{x-9} < 1$;
5. Вычислите: $\log_3 81 - \log_3 27$;
6. Вычислите: $5^{\log_5 14} - \log_4 \log_2 16$;

7. Определите x, если $\log_5 x = -3$;
8. Решите неравенство: $\log_4(x-2) \geq 2$;
9. Решите уравнение: $3^{2x} - 10 \cdot 3^{x} + 9 = 0$;

Критерии оценки самостоятельной работы №2-2

Отметка	**Количество примеров, необходимое для получения отметки**
« **5**» (отлично)	9
« **4**» (хорошо)	7-6
« **3**» (удовлетворительно)	6
« **2** « (неудовлетворительно)	менее 6

Самостоятельная работа №3 (12 час.)

Взаимное расположение прямой и плоскости.

Цели: уметь строить чертежи к задачам и решать задачи

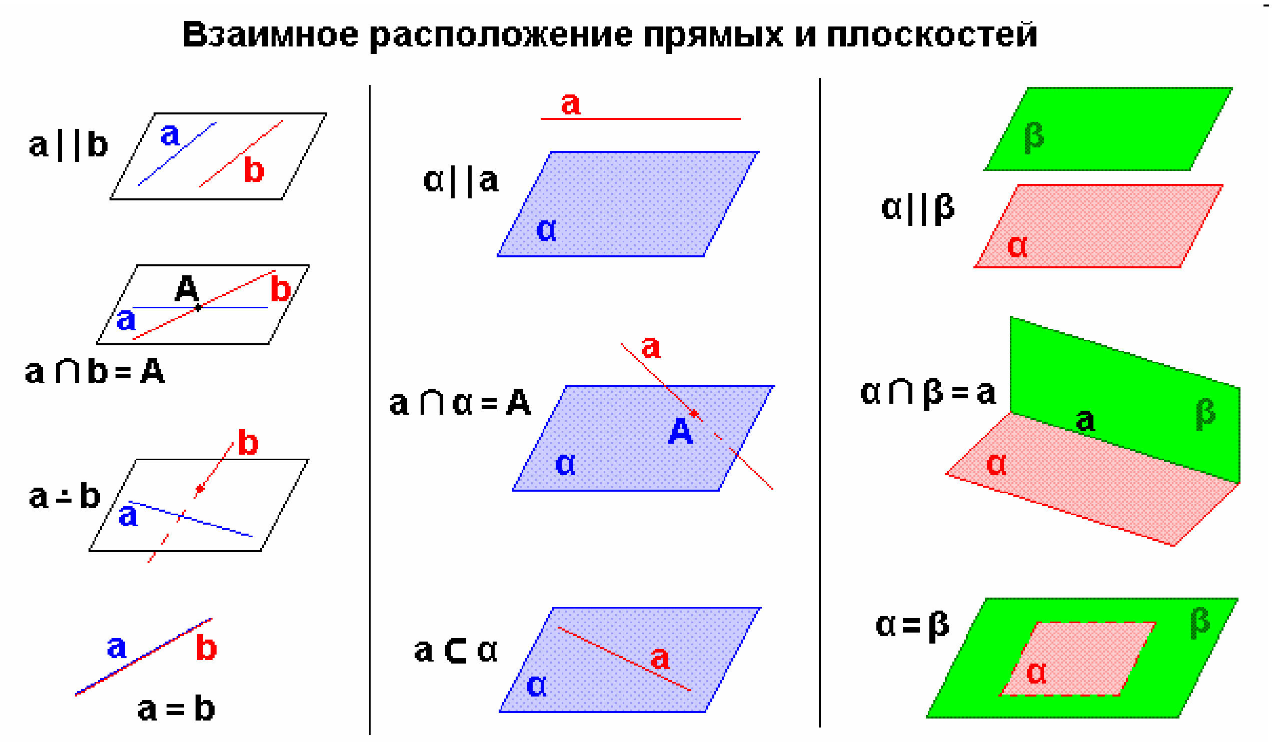
Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме, выполните необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал.



1.По рисункам внимательно изучите взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Из предложенных ниже вариантов действий подберите к каждому рисунку соответствующие и впишите в свободные ячейки.

1.1 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

а)	***а)***	***а)***
б)	***б)***	***б)***

а) прямая лежит в плоскости; прямая пересекает плоскость; прямая не пересекает плоскость.

б) имеют две общие точки; имеют одну общую точку; не имеют общих точек; имеют бесконечное множество точек.

2. Заполните пропуски в определении параллельности прямой и плоскости в пространстве, выбрав верный вариант из числа предложенных ниже. Сделайте рисунок и запись с помощью математической символики.

<u>Определение:</u> *Прямая и …………………….. называются параллельными, если*

____

Рисунок	*Запись*

3.Вставьте пропущенные слова из предложенных ниже вариантов так, чтобы высказывание было верным:

Если прямая параллельна плоскости, то эта прямая………………………. ………………………………….с любой прямой, лежащей в этой плоскости.

а) параллельна или совпадает;

б) скрещивается;

в) параллельна или скрещивается;

г) параллельна.

4.Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости в пространстве, заполнив пропуски по смыслу. Сделайте рисунок и запись с помощью математической символики.

__Признак:__ *Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна ……*

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Рисунок	*Запись*

5. Верны или нет следующие утверждения?

Рисунок

(Варианты ответов: а) верно; б) не верно. К каждому утверждению сделайте рисунки.)

1) Если прямая ***а*** параллельна плоскости α, а прямая ***в*** параллельна прямой ***а***, то прямая ***в*** параллельна плоскости α.

*Ответ:*____________________

Рисунок

2) Если прямые ***а*** и ***в*** параллельны плоскости **α**, то прямая ***в*** параллельна прямой ***а***.

Ответ: _________________________

Рисунок

3) Если прямая ***а*** параллельна плоскости **α**, то в плоскости α существует прямая ***в***, параллельная прямой ***а***.

Ответ: _________________________

Рисунок

Как расположены прямые ***а*** и ***в***, если через прямую ***в***

6.можно провести две плоскости, параллельные прямой ***а***?

Сделайте рисунок.

*Ответ:*__________________________________

7.На рисунке 15 дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Перечислите все ребра, которые:

а) параллельны плоскости DD_1C.

Ответ: ________________________________

б) пересекают плоскость DD_1C.

Ответ: ________________________________

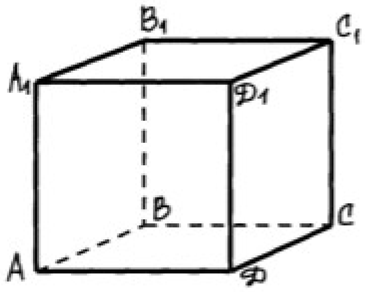


Рисунок 15

8.Выберите верный ответ.

1) Даны плоскость **α** и точка M не принадлежащая этой плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через точку M и параллельных плоскости **α**?

а) 0; б) 1; в) ∞; г) 0 или ∞; д) 1 или ∞.

Ответ: ________________________________

2) В пространстве дана прямая a и точка M, не принадлежащая прямой a. Сколько существует плоскостей, проходящих через точку M и параллельных прямой a.

а) 0; б) 1; в) ∞; г) 0 или ∞; д) 1 или ∞.

Ответ: ________________________________

3) Прямая a пересекает плоскость **α**. Сколько можно провести прямых, пересекающих прямую a и параллельных плоскости **α**?

а) 0; б) 1; в) ∞; г) 0 или ∞; д) 1 или ∞.

Ответ: ________________________________

4) Прямая a параллельна плоскости α. Плоскость **β** проходит через прямую а и пересекает плоскость **α**. Как расположены между собой прямая а и линия пересечения плоскостей? *(Сделайте рисунок)*

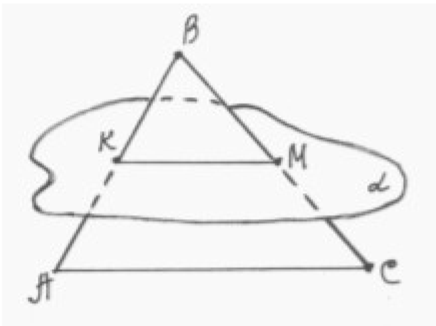
Ответ: ________________________________

Рисунок

9.Через серединами боковых сторон трапеции $ABCD$ проведена плоскость **α**. Определите как расположены основания трапеции AD и BC, относительно плоскости **α**. *(Ответ обоснуйте. Сделайте рисунок по условию задачи и математическую запись)*

Рисунок	Запись (обоснование)

10.Через середины ***К*** и ***М*** сторон треугольника ***АВС*** (***К***- лежит на ***АВ***, ***М***- на ***ВС***) проведена плоскость *(смотрите рисунок 16).* Какое положение занимает проведённая плоскость относительно стороны ***АС***? (Заполните пропуски в решении задачи.)



Дано: ΔABC*; К* ϵ *….; АК…. ВК;*

М ϵ *….; ВМ ….. СМ; КМ*$\epsilon\alpha$

Определить взаимное расположение α *и АС.*

Решение:

1)Т.к К и М - середины сторон ……. и …….. ΔABC*, то КМ - ………………. линия* ΔABC*.*

Следовательно, КМ……. АС

2) Но КМ …….α *и КМ ∥ АС, следовательно* α*……….АС.*

Ответ:α*………..АС.*

Параллельность плоскостей.

Взаимное расположение плоскостей

Две различные прямые на плоскости или параллельны, или пересекаются. Точно так же две различные плоскости в пространстве либо параллельны, либо пересекаются (рис. 1).

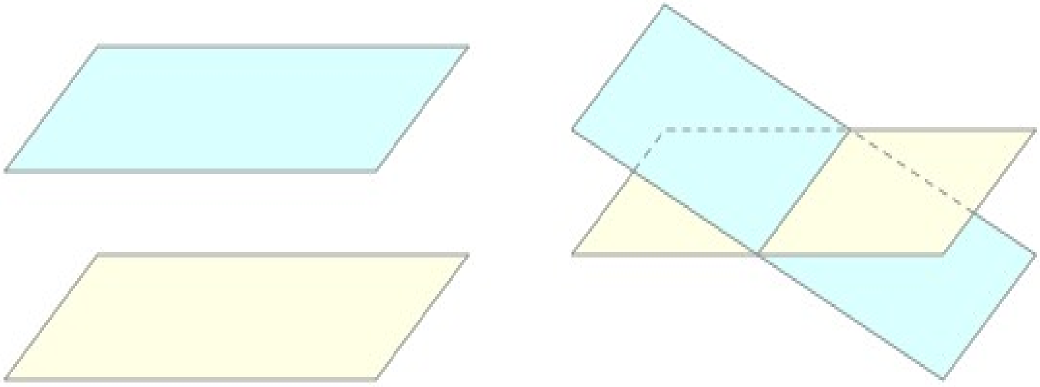


Рис. 1. Взаимное расположение плоскостей

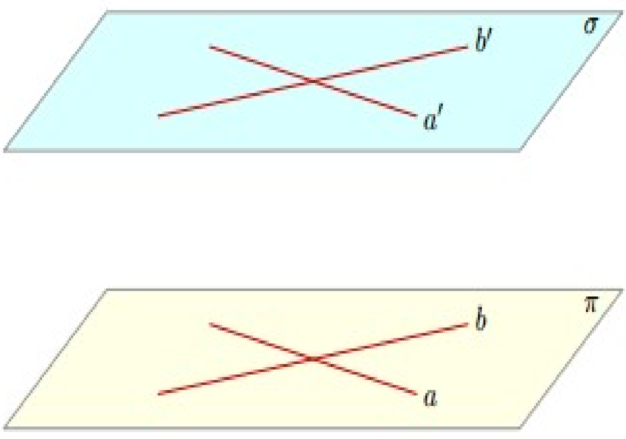
Параллельность плоскостей

Определение. Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Предположим, в некоторой задаче нам хотелось бы доказать, что некоторые плоскости параллельны. Как это сделать? Для такой цели имеется специальное утверждение.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Мы видим эту ситуацию на рис. 2. Именно, пусть пересекающиеся прямые a и b, лежащие в плоскости π, параллельны соответственно прямым a' и b', лежащим в плоскости σ. Тогда плоскость π параллельна плоскости σ.



Задача. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точка K — середина ребра A_1D_1. Найдите площадь сечения куба плоскостью ACK.

Решение. Секущая плоскость ACK пересекает плоскость ABC нижней грани куба по прямой AC (рис. 5). Плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна плоскости ABC; следовательно, секущая плоскость пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой KM, параллельной AC.

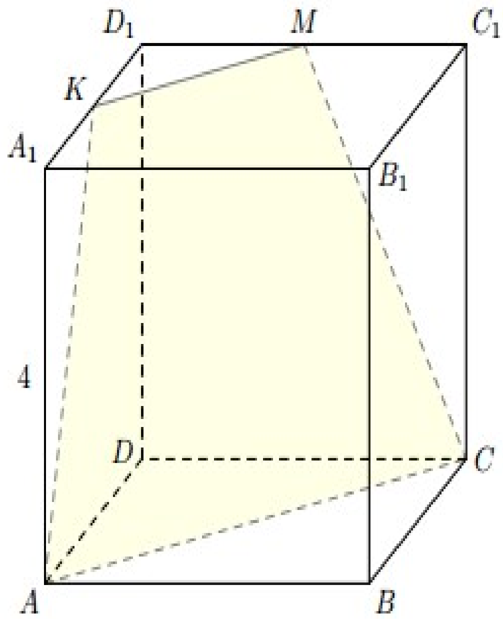


Рис. 5. К задаче

Плоскости ADD_1 и CDD_1 пересекаются секущей плоскостью по прямым AK и CM соответственно. Таким образом, сечение куба — трапеция $AKMC$, в которой

$$AC = 4\sqrt{2}, \quad AK = CM = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad KM = \frac{1}{2}A_1C_1 = 2\sqrt{2}.$$

Нарисуем эту трапецию отдельно (рис. 6). Проведём высоты KE и MF.

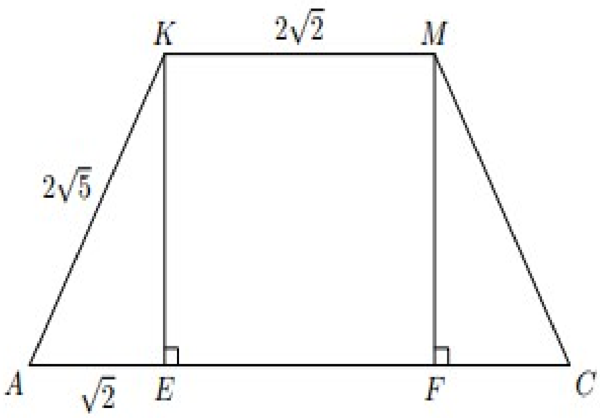


Рис. 6. Планиметрический чертёж сечения

$$AE = CF = \frac{AC - KM}{2} = \sqrt{2}.$$

Тогда высота трапеции:

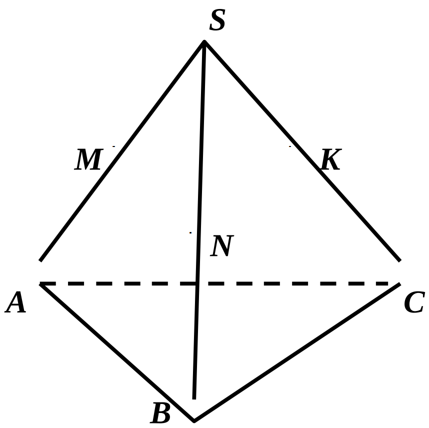
$$KE = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Остаётся найти площадь трапеции:

$$S = \frac{AC + KM}{2} \cdot KE = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18.$$

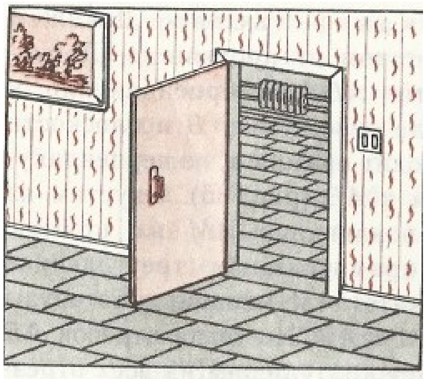
Ответ: 18.

1. Дана треугольная пирамида ***SABC***. На боковых ребрах отмечены точки ***M, N, K*** – которые являются серединами этих ребер. Как расположены плоскость основания пирамиды и плоскость, проходящая через точки ***M, N, K***? *(Завершите начатый рисунок и дайте объяснение в колонке «Запись».)*

Рисунок	*Запись*
	

Перпендикуляр прямой и плоскости..

Представление о прямых или, вернее, об отрезках, перпендикулярных плоскости, дают вертикально стоящие столбы (они перпендикулярны поверхности земли), натянутый шнур, на котором висит лампа (он перпендикулярен потолку). Вертикальный косяк двери перпендикулярен полу, и нижний край двери, прилегающий к полу, перпендикулярен косяку при всех положениях двери (рис. 33, *а*). Этим свойством и определяется перпендикулярность прямой и плоскости.

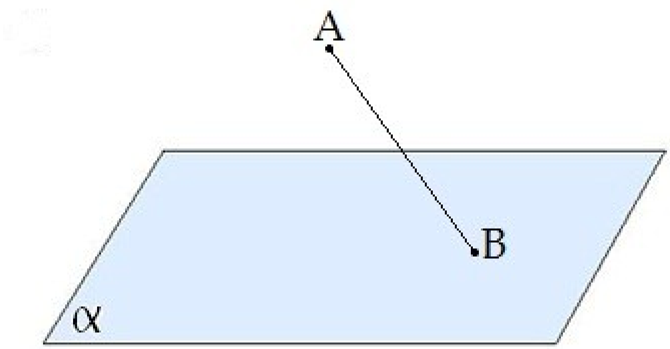


а)

Перпендикуляр и наклонная

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием наклонной.

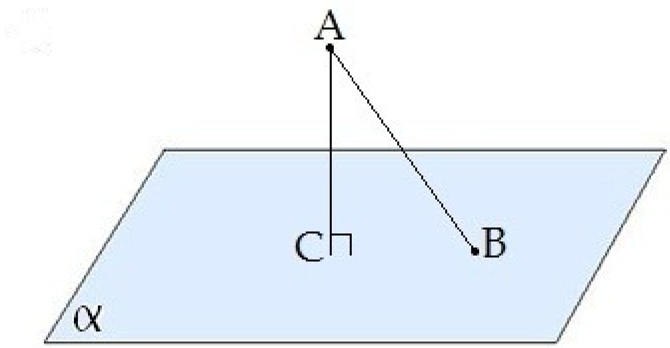


AB - наклонная.

B - основание наклонной.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра.

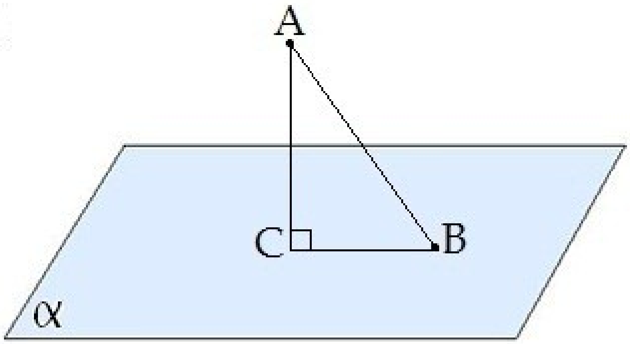


AC - перпендикуляр.

C - основание перпендикуляра.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

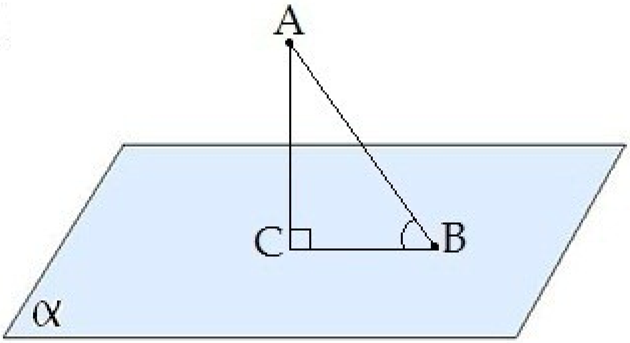
Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется проекцией наклонной.



CB - проеция наклонной AB на плоскость α.

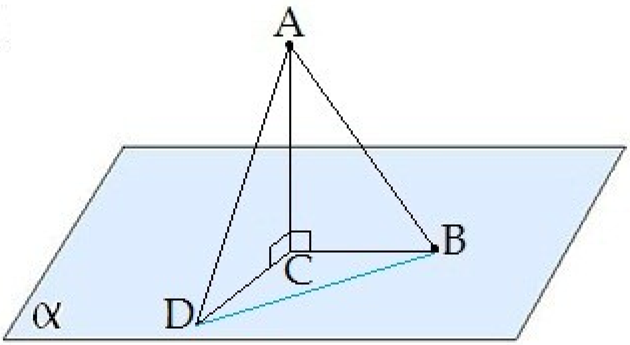
Треугольник ABC прямоугольный.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость.



∢CBA - угол между наклонной AB и плоскостью α.

Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция.



Если AD > AB, то DC > BC

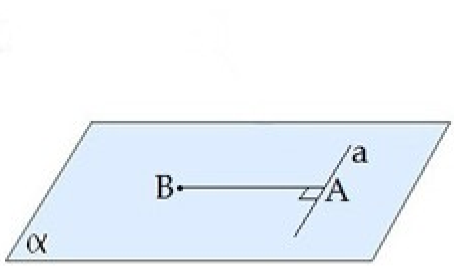
∢DAB - угол между наклонными

∢DCB - угол между проекциями

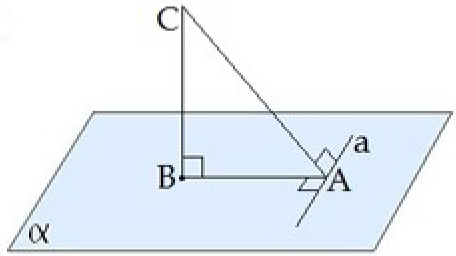
Отрезок DB - расстояние между основаниями наклонных.

<u>Теорема о трех перпендикулярах</u>

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.



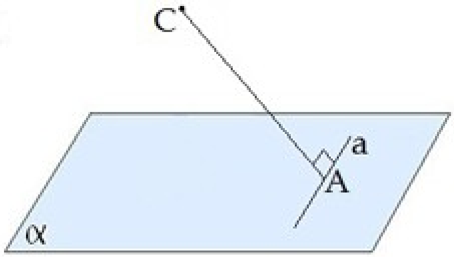
a ⊥ AB



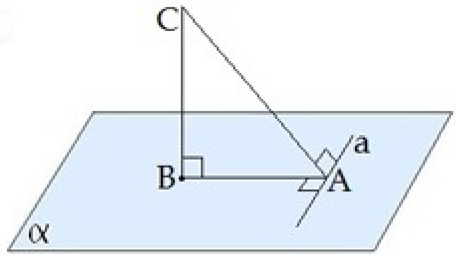
$a\perp ABBC\perp BA\}\Rightarrow a\perp CA$

Справедлива также обратная теорема:

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



a ⊥ AC



$a\perp ACBC\perp BA\}\Rightarrow a\perp BA$

Задачи

№1 Дан параллелепипед

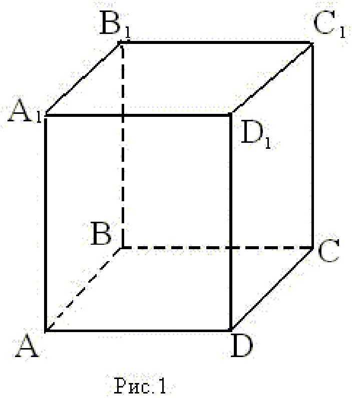


Рис.1

а) Назовите:

1) рёбра, перпендикулярные к плоскости (DCC1) *(ответ: AD; A1D1; B1C1; BC)*

2) плоскости, перпендикулярные ребру BB1 (ответ: *(ABC); (A1B1C1))*

б) Определите взаимное расположение:

1) прямой CC1 и плоскости (DCB) *(ответ: они перпендикулярны)*

2) прямой D1C1 и плоскости (DCB) (*ответ: они параллельны)*

№2

Дано: Δ ABC - прямоугольный; AM $\perp$ AC; M $\notin$ (ABC)

Доказать: AC $\perp$ (AMB)

Доказательство: Т.к. AC $\perp$ AB и AC $\perp$ AM, а AM $\cap$ AB,

т.е. AM и AB лежат в плоскости (AMB), то AC $\perp$ (AMB)

по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

№3

Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна 9.6. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причем CM = 28. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

Решение:

№4 Прямые AB,AC иAD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD,

если 1) AB=3 см, BC = 7 см, AD = 1,5 м.

Решение:

1. Так как прямые AB, AC, AD попарно перпендикулярны, то они образуют прямоугольных треугольника, со смежными сторонами.

а) ΔABC :

AB = 3см, BC = 7см. AC $\perp$ AB (по теореме Пифагора);

$AC^2 = BC^2 - AB^2$;

$AC^2 = 72 - 32 = 40$;

$AC^2 = 40$см.

б) ΔACD — прямоугольный (по условию):

$CD^2 = AC^2 + AD^2$;

$CD^2 = 40 + 2,25 = 42,25$ (см^2);

CD = 6,5 (см).

Изображение пространственных фигур на плоскости.

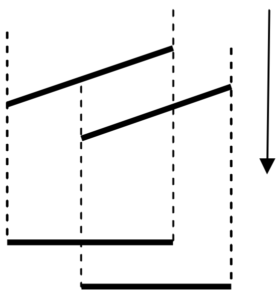
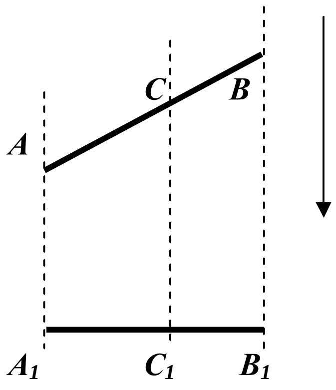
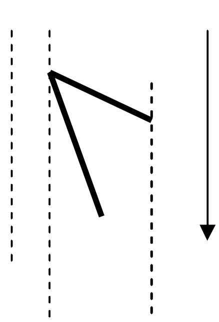
1. Закончите формулировки свойств параллельного проектирования и изображения фигур.

<u>Свойство 1:</u> *При ……………………… проектировании прямолинейные отрезки фигуры ………………………………… на плоскости чертежа ……………………………………*

<u>Свойство 2:</u> *Параллельные отрезки фигуры при ……………………… ……………………………………изображаются на плоскости чертежа …………………………………… отрезками.*

<u>Свойство 3:</u> *При параллельном ……………………………… отношение отрезков одной прямой или ……………………………………… прямых ……………………………………*

2. Внимательно изучите изображения рисунков **1, 2, 3** и под каждым из них подпишите, какому свойству параллельного проектирования они соответствуют.

Рисунок 1	***Рисунок 2***	***Рисунок 3***
		
____________________	____________________	____________________

3. *Ответьте на вопросы:*

3.1Проекция фигуры – точка. Какая это фигура?

Ответ: ____

3.2 Могут ли быть параллельные прямые проекциями непараллельных прямых?

Ответ: ____

3.3 Отрезок ***а*** – проекция отрезка ***в***. Всегда ли отрезок ***а*** короче отрезка ***в***?

Ответ: ____

3.4 Может ли ромб быть проекцией квадрата?

Ответ: ____

3.5 Существует ли неплоская фигура, проекция которой отрезок?

Ответ: ____

3.6 Проекция фигуры на плоскость – угол. Какая это фигура?

Ответ: ____

3.7 Будет ли средняя линия проекции трапеции являться средней линии оригинала?

Ответ: ____

3.8 Может ли при параллельном проектировании параллелограмма получиться трапеция?

Ответ: ____

4. Постройте произвольную плоскую фигуру с помощью параллельного проектирования**.**

пример

Задачи для самостоятельного решения

по теме: «Прямые и плоскости в пространстве»

№3-1

1 вариант

1. Сторона AB параллелограмма ABCD принадлежит плоскости α, а сторона CD ей не принадлежит. Каково взаимное расположение прямой CD и плоскости α? Объясните.
2. Точки M,N,F,K не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые MN и FK пересекаться?
3. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M,N,K – середины отрезков AD, AC, AB соответственно. Доказать, что плоскости (MNK) и (BCD) параллельны.

4. Плоскости α и β параллельны. Отрезок AB лежит в плоскости α, CD – в плоскости β. Отрезки BC и AD пересекаются в точке O, которая лежит между данными плоскостями. Найти AO, если AB= 3 см, CD= 12 см, AD= 20 см.

2 вариант

1. Плоскость проходит через одну из двух параллельных прямых. Как располагаются данная плоскость и другая прямая? Поясните.

2. Прямые FM и RP- скрещивающиеся. Могут ли прямые FR и MP быть параллельными?

3. Точка F не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M,N,K принадлежат отрезкам AF, BF, CF так, что $\angle FMN = \angle FAB$, $\angle FNK = \angle FBC$. Доказать, что плоскости (ABC) и (MNK) параллельны.

4. Плоскости α и β параллельны. Лучи OM и OF пересекают плоскость α в точках A и B соответственно, плоскость β – в точках C и D соответственно. Точка O лежит над данными плоскостями. Найти OB, если AB = 4см, CD = 10 см, BD = 6 см.

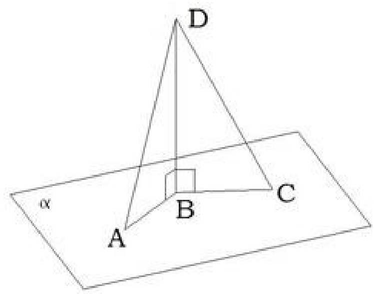
3-2

1. Прямая a пересекает плоскость β в точке C, и образует с плоскостью угол 60°. $P \in a$, точка R - проекция точки P на плоскость β. RC=7 см. Найдите PC.

2. К плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 8 см . На каком расстоянии от плоскости находится точка, из которой проведена наклонная?

3. К плоскости α проведена наклонная AB ($A \in \alpha$). Длина наклонной равна 24 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычислите, на каком расстоянии от плоскости находится точка B.

4. Наклонная AD с плоскостью α образует угол 30° , а наклонная DC с плоскостью α образует угол 45°. Длина перпендикуляра DB равна 19 см. Вычислите длины обеих наклонных.



5. Длина отрезка VB равна 20 м. Он пересекает плоскость в точке O. Расстояние от концов отрезка до плоскости соответственно равны 8 м и 2 м. Найдите острый угол, который образует отрезок VB с плоскостью.

6. Равнобедренный треугольник ABE находится в плоскости α. Боковые стороны треугольника ABE равны по 10 см, а сторона основания AE = 12 см. К этой плоскости проведены перпендикуляр CB, который равен 6 см, и наклонные CA и CE. Вычислите расстояние от точки C до стороны треугольника AE.

7. Двугранный угол равен 45°. На одной грани двугранного угла дана точка B, расстояние от которой до ребра равно 22 см. Чему равно расстояние от точки B до второй грани двугранного угла?

8. Двугранный угол равен 120 градусов. Внутри его дана точка А, которая находится на расстоянии 36 см от обеих граней угла. Чему равно расстояние от точки А до ребра двугранного угла?

Критерии оценки самостоятельной работы №3-2

Отметка	**Количество задач, необходимое для получения отметки**
« **5**» (отлично)	8
« **4**» (хорошо)	6-7
« **3**» (удовлетворительно)	5-4
« **2** « (неудовлетворительно)	менее 4

Самостоятельная работа №4 (6 час.)

Решение задач: формулы бинома Ньютона.

Цели: Решение практических задач с применением основных понятий комбинаторики

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал

Комбинаторика. Бином Ньютона Перестановки. Факториал. Размещения. Сочетания. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля. Свойства биномиальных коэффициентов.

Общим термином «соединения» мы будем называть три вида комбинаций, составляемых из некоторого числа различных элементов, принадлежащих одному и тому же множеству (например, буквы алфавита, книги в библиотеке, машины на стоянке и т.д.).

Перестановки. Возьмём n различных элементов: a1 , a2 , a3 , …, an . Будем переставлять их всеми возможными способами, сохраняя их количество и меняя лишь порядок их расположения. Каждая из полученных таким образом комбинаций называется перестановкой. Общее количество перестановок из n элементов обозначается Pn . Это число равно произведению всех целых чисел от 1 до n :

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$

Символ n! (называется факториал) - сокращённая запись произведения: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

П р и м е р . Найти число перестановок из трёх элементов: a, b, c.
Р е ш е н и е . В соответствии с приведенной формулой: $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.
Действительно, мы имеем 6 перестановок: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Размещения. Будем составлять группы из m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, располагая эти m взятых элементов в различном порядке. Полученные комбинации называются размещениями из n элементов по m .

Их общее количество обозначается: A_n^m и равно произведению:

П р и м е р . Найти число размещений из четырёх элементов a, b, c, d по два.

Р е ш е н и е . В соответствии с формулой получим:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)].$$

Вот эти размещения: ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.

Сочетания. Будем составлять группы из m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, не принимая во внимание порядок расположения этих m элементов. Тогда мы получим сочетания из n элементов по m .

Их общее количество обозначается C_n^m и может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$ следует $$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Заметим, что можно составить только одно сочетание из n элементов по n , которое содержит все n элементов. Формула числа сочетаний даёт это значение, если только принять, что 0! = 1, что является определением 0! .

П р и м е р . Найти число сочетаний из пяти элементов: a, b, c, d, e по три.

Р е ш е н и е :

Эти сочетания: abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

Бином Ньютона. Это формула, представляющая выражение (a + b) n при положительном целом n в виде многочлена:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n .$$

сумма показателей степеней для a и b постоянна и равна n.

Пример:

Числа $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \ldots, C_n^{n-1}$ называются биномиальными коэффициентами.

Их можно вычислить, применяя только сложение, если пользоваться следующей схемой. В верхней строке пишем две единицы. Все последующие строки начинаются и заканчиваются единицей. Промежуточные числа в этих строках получаются суммированием соседних чисел из предыдущей строки. Эта схема называется треугольником Паскаля:

```
                1     1
             1     2     1
          1     3     3     1
       1     4     6     4     1
    1     5    10    10     5     1
  1    6    15    20    15     6     1
1    7    21    35    35    21     7     1
1    8    28    56    70    56    28     8     1
.........................................................
```

Первая строка в этой таблице содержит биномиальные коэффициенты для n = 1; вторая - для n = 2; третья - для n = 3 и т.д. Поэтому, если необходимо, например, разложить выражение: (a + b)7 , получаем результат моментально, используя таблицу:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Свойства биномиальных коэффициентов.

1. Сумма коэффициентов разложения (a + b) n равна 2 n .

Для доказательства достаточно положить a = b = 1. Тогда в правой части разложения бинома Ньютона сумма биномиальных коэффициентов, а слева:

2. Коэффициенты членов, равноудалённых от концов разложения, равны.

Это свойство следует из соотношения: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

3. Сумма коэффициентов чётных членов разложения равна сумме коэффициентов нечётных членов разложения; каждая из них равна

Для доказательства воспользуемся биномом: $(1-1)^n = 0^n = 0$. Здесь чётные члены имеют знак « + » , а нечётные - « - ». Так как в результате разложения получается 0, то следовательно, суммы их биномиальных коэффициентов равны между собой, поэтому каждая из них равна: что и требовалось доказать.

Решение задач.

№1 Сколькими способами N можно собрать слово «мама», имея в азбуке пять букв «а» и три буквы «м»?

Решение. Первую букву слова можно выбрать тремя способами и на каждый вариант первой буквы имеется пять способов выбрать вторую букву. Значит, способов собрать слог «ма»: 3 • 5 = 15. Для каждого из них третья буква может быть получена двумя способами остается только две буквы «м», а последняя буква - четырьмя
способами: N = 3 • 5 • 2 • 4 = 120.

№2 Сколькими способами N можно собрать слово «мама», имея в азбуке пять букв «а» и три буквы «м»?

Решение. Первую букву слова можно выбрать тремя способами и на каждый вариант первой буквы имеется пять способов выбрать вторую букву. Значит, способов собрать слог «ма»: 3 • 5 = 15. Для каждого из них третья буква может быть получена двумя способами остается только две буквы «м», а последняя буква - четырьмя
способами: N = 3 • 5 • 2 • 4 = 120.

№3 Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5? И сколько из них с неповторяющимися цифрами?

Решение. Если цифры могут повторяться, то на любом месте в числе могут быть любые из пяти цифр. Значит, всего трехзначных чисел получается 5 • 5 • 5 = 5^3 = 125. Если же цифры не повторяются, то таких чисел Ai^3 = = (5-3)! = 5 • 4 • 3 = 60.

№4 Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?

Решение. Ясно, что в этом случае на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски может быть расположено только по одной ладье. Число возможных позиций N - число перестановок из 8 элементов: $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$.

Задачи для самостоятельного решения по теме:

«Элементы комбинаторики»

1) В коробке находятся 2 белых, 3 чёрных и 4 красных шара. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) красный; 4) белый или чёрный; 5) белый или красный; 6) чёрный или красный; 7) или белый, или чёрный, или красный; 8) синий.
2) В ящике находятся 3 белых, 4 синих и 5 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) цветной; 2) либо белый, либо красный; 3) либо белый, либо синий? Решить задачу двумя способами.
3) В первой партии из 20 деталей 6 нестандартных, а во второй партии из 30 деталей 5 нестандартных. Наугад из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали оказались нестандартными; 2) обе детали оказались стандартными; 3) хотя бы одна деталь оказалась стандартной; 4) хотя бы одна деталь оказалась нестандартной.

1 вариант		**2 вариант**	
1.	В лотерее участвуют 100 билетов, среди которых 4 выигрышных. Наугад берут один билет. Какова вероятность того, что взятый билет выигрышный?	1.	В лотерее участвуют 100 билетов, среди которых 5 выигрышных. Наугад берут один билет. Какова вероятность того, что взятый билет выигрышный?
2.	Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) либо дама, либо валет; 2) либо семёрка треф, либо карта бубновой масти? Решить задачу двумя способами.	2.	Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) либо шестёрка, либо туз; 3) либо туз красной масти, либо карта трефовой масти? Решить задачу двумя способами.

3.	В первой коробке находятся 7 белых и 3 чёрных шара, а во второй — 5 белых и 9 чёрных. Не глядя из каждой коробки, вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба вынутых шара белые; 3) хотя бы один шар белый.	3.	В первой коробке находятся 7 белых и 3 чёрных шара, а во второй — 5 белых и 9 чёрных. Не глядя из каждой коробки, вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба вынутых шара чёрные; 3) хотя бы один шар чёрный.

Критерии оценки самостоятельной работы №3-2

Отметка	**Количество задач, необходимое для получения отметки**
« **5**» (отлично)	6
« **4**» (хорошо)	5-4
« **3**» (удовлетворительно)	3
« **2** « (неудовлетворительно)	менее 3

Самостоятельная работа №5 (12час)

Координаты вектора. Действия над векторами.

Цели: научиться выполнять действия над векторами; применять формулы при решении задач, находить скалярное произведение двух векторов, угол между векторами;

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

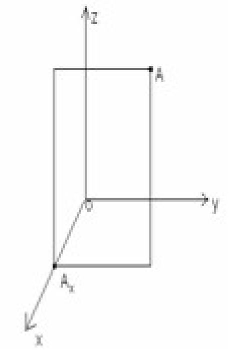
Ход работы.

Теоретический материал

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве

1.1 Введение декартовых координат в пространстве

Возьмём три взаимно перпендикулярные прямые x, y,z, пересекающиеся в одной точке O. Проведём через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy. Две другие плоскости называются соответственно xz, yz. Прямые x, y, z называются координатными осями, точка их пересечения O – началом координат, а плоскости xy, xz, yz – координатными плоскостями. Точка O разбивает каждую из осей координат на две полупрямые – полуоси. Условимся одну из них называть положительной, а другую – отрицательной. Возьмём теперь произвольную точку A и проведём через неё плоскость, параллельную плоскости yz. Координатой x точки A будем называть число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x: положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси x, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Аналогично определяются координаты y, z точки A. Точку A обозначают A(x,y,z). Точка O имеет координаты (0,0,0).



1.2 Расстояние между двумя точками

Расстояние d между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

В частности, расстояние d от точки M(x,y,z) до начала координат определяется формулой:

$$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Пример 1:

На оси OX найти точку, равноудалённую от точек A(2;-4;5) и B(-3;2;7).

Решение:

Пусть т. M – искомая точка. Так как т. M лежит на оси Ox, то она имеет координаты (x,0,0). По условию задачи $|AM| = |BM|$.

$$|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + (-4)^2 + 5^2}\ ; |BM| = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + 7^2}\ .$$

Приравняем эти равенства и возведём в квадрат:

$(x-2)^2+41=(x+3)^2+53$. Решая это уравнение, получим:

10x=-17, x=-1,7. Значит координаты т.M будут (-1,7;0;0)

Ответ: M (-1,7;0;0)

1.3 Деление отрезка в данном отношении

Координаты точки C(x,y,z), делящий отрезок между точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ в заданном отношении λ определяется по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

В частности, при λ=1 получаются формулы середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Пример 2:

Точка С (2;3;6) является серединой отрезка АВ. Определить координаты точки А, если В(7;5;8).

Решение:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$2 = \frac{x_1 + 7}{2}; 3 = \frac{y_1 + 5}{2}; 6 = \frac{z_1 + 8}{2}$$

$x_1=4-7=-3$; $y_1=6-5=1$; $z_1=12-8=4$

Ответ: А(-3;1;4)

2. Векторы в пространстве

2.1 Понятие вектора. Вектора на координатной плоскости

В пространстве, как и на плоскости, вектором называется направленный отрезок и обозначается $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB}$. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором .

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначение: $\vec{a}$ II $\vec{b}$.

Свободный вектор $\vec{a}$ заданный в координатном пространстве 0xyz, может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Такое представление вектора $\vec{a}$ называется его разложением по осям координат. Здесь $a_x; a_y; a_z$ – проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат (их называют координатами вектора $\vec{a}$), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).

Векторы $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$, в виде суммы которых представлен вектор $\vec{a}$, называются составляющими (компонентами) вектора $\vec{a}$ по осям координат.

Длина (модуль) вектора $\vec{a}$ обозначается $|\bar{a}|$ и определяется по формуле:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец – в точке M(x;y;z) называют радиусом – вектором точки M и обозначают $\vec{r}$ (M) или просто $\vec{r}$. Так как его координаты совпадают с координатами точки M.

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$, имеющий начало в точке A(x_1; y_1; z_1) и конец в точке B(x_2; y_2; z_2) может быть записан в виде $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, где $\vec{r}_1$ - радиус- вектор точки A, $\vec{r}_2$ - радиус – вектор точки B. Поэтому разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ имеет вид:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}}$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B:

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

<u>Пример 3:</u>

Разложить вектор $\overrightarrow{AB}$ по координатным векторам и найти длину данного вектора, если A(-2;-1;0), B(4;-3;5).

<u>Решение:</u>

$\overrightarrow{AB}$ =(4-(-2)) $\vec{i}$ +(-3-(-1)) $\vec{j}$ +(5-0) $\vec{k}$ =6 $\vec{i}$ -2 $\vec{j}$ +5 $\vec{k}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d = \sqrt{(4+2)^2 + (-3+1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{36+4+25} = \sqrt{65}$$

Ответ: $\sqrt{65}$.

2.2 Действия над векторами

1. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы их разложениями по ортам, то их сумма и разность определяются по формулам:

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$
$$\vec{a}-\vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$$

Пример 4:

Найти вектор $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{i} - 6\vec{k}$

Решение:

$2\vec{b} = -6\vec{i} + 10\vec{j}$, $3\vec{c} = 15\vec{i} - 18\vec{k}$,

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2-6)\vec{i} + (1+10)\vec{j} - 3\vec{k} = -4\vec{i} + 11\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = (-4-15)\vec{i} + 11\vec{j} + (-3-(-18))\vec{k} =$$
$$= -19\vec{i} + 11\vec{j} + 15\vec{k}$$

Ответ: $-19\vec{i} + 11\vec{j} + 15\vec{k}.$

Условие коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами $\vec{a}$ (x_1;,y_1;z_1) и $\vec{b}$ (x_2;,y_2;z_2) определяется следующим соотношением:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Пример 5:

При каком значении n векторы $\vec{a}(4;6;n)$ и $\vec{b}(-\frac{1}{2};-\frac{3}{4};3)$ будут коллинеарны?

Решение:

Составим пропорцию: $\frac{4}{-\frac{1}{2}} = \frac{6}{-\frac{3}{4}} = \frac{n}{3}$, возьмём 1 и 3 отношения: $\frac{4}{-\frac{1}{2}} = \frac{n}{3}$ из которого найдём n: n=-24

<u>Ответ:</u> при n=-24 вектора будут коллинеарны.

<u>Пример 6.</u> Дано: $\overline{a}(2;3)$, $\overline{b}(-3;4)$

Найти: $\overline{\upsilon} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$ *Решение:* 1. **Найдем** $2\overline{a}$: $2\overline{a} = (2 \cdot 2; 2 \cdot 3) = (4;6)$

2 **Найдем** $3\overline{b}$ **:**

$3\overline{b} = (3 \cdot (-3); 3 \cdot 4) = (-9;12)$

3 **Найдем** $\overline{\upsilon} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$:

$\overline{\upsilon} = 2\overline{a} - 3\overline{b} = (4+9; 6-12) = (13;-6)$

Ответ: (13;-6)

<u>Пример 7.</u> Дано: C(2;6) A(4;-5) B(-1;2)

Найти: $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ Решение: 1.Найдем $\overline{AB}$:

$\overline{AB} = (-1-4; 2+5) = (-5;7)$ (из координаты конца надо отнять координаты начала)

2.Найдем $\overline{AC}$ $\overline{AC} = (2+1; 6-2) = (3;4)$

3.Найдем $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ по формуле $\overline{a} \cdot \overline{в} = x_1 x_2 + y_1 y_2$:

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 \cdot (-5) + 7 \cdot 4 = -15 + 28 = 13$

Ответ: 13.

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением 2-х ненулевых векторов называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$, т.е. если φ – угол между векторами, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения:

1^0. $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$

2^0. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

3^0. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$

4^0. $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тогда скалярное произведение этих векторов находится по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности 2-х ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \neq 0; \vec{b} \neq 0; \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Зная скалярное произведение 2-х векторов $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ можно найти угол между ними:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

<u>Пример 1:</u>

Будет ли вектор $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ перпендикулярен вектору $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$?

<u>Решение:</u>

Найдём скалярное произведение этих векторов:

$\vec{c} \cdot \vec{d} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = 2$

Так как скалярное произведение не равно нулю, то вектора не перпендикулярны.

Ответ: нет.

Пример 2:

Заданы 2 вектора своими координатами

$\vec{a}$(-4;3;0), $\vec{b}$ (3;-4;1). Найти косинус угла между ними.

Решение:

$$\cos\varphi = \frac{-4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot 1}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{-24}{5 \cdot \sqrt{26}}$$

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{-24}{5 \cdot \sqrt{26}}$

Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

№1. Вычислить работу, совершаемую силой F=(1;2;3), при прямолинейном перемещении материальной точки из положения B(1;0;0) в положение C(10;1;2).

Физический смысл скалярного произведения векторов, есть ни что иное, как работа A совершенная силой F> по перемещению из одной точки пространства в другую (из B в C)

A = | F> | • | BC> | cos (F>; BC>),

т. е. A = F> • BC> - скалярному произведению

Так как: **F>**= (1; 2; 3), BC> = (9; 1; 2)

Получаем: A = 1•9 + 2•1 + 3•2 = 17 (ед. работы).

Таким образом, чтобы найти работу постоянной силы F> при перемещении материальной точки вдоль отрезка BC>, достаточно вычислить скалярное произведение вектора силы F> и вектора перемещения BC>.

2. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках A(2;-3), B(1,1), C(-6,5)

Задачу очень просто решить, воспользовавшись формулой

$$S = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]$$

в которой нужно взять $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -6$,

$y_1 = -3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 5$.

Подставляя эти числа в формулу, получим

S = 12 кв. ед.

Задачи для самостоятельного решения по теме: «Координаты и векторы»

Задание

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ *и* $\overrightarrow{CD}$

4 Найти $\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \cdot \overline{AD}$

5 Найти $Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD} + \overline{AC}\right)$

6 Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

7 Выяснить, ортогональны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

Исходные данные:

Даны точки $A(6, 3, 3)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(3, 1, 1)$, $D(0, 4, 5)$.

Задание 1

Решение:

$\overrightarrow{AB} = \{-1-6; 0-3; -2-3\} = \{-7; -3; -5\}$;

$\overrightarrow{BC} = \{3+1; 1-0; 1+2\} = \{4; 1; 3\}$;

$\overrightarrow{CD} = \{0-3;\ 4-1;\ 5-1\} = \{-3;\ 3;\ 4\}$;

$\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD} = \{-7-3\cdot 4+4\cdot(-3);\ -3-3\cdot 1+4\cdot 3;\ -5-3\cdot 3+4\cdot 4\} =$
$\{-31;\ 6;\ 2\}$

Задание 2

Решение:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{83}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{26}$$

$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{34}$$

Задание 3

Решение:

$$\cos \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC} = \frac{-7\cdot 4 - 3\cdot 1 - 5\cdot 3}{\sqrt{83}\sqrt{26}} = \frac{-46}{\sqrt{2158}};$$

$$\cos \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD} = \frac{4\cdot(-3) + 1\cdot 3 + 3\cdot 4}{\sqrt{26}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{884}}$$

Задание 4

Решение:

Даны точки $A(6, 3, 3)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(3, 1, 1)$, $D(0, 4, 5)$.

$\overrightarrow{AB} = \{-7; -3; -5\}$; $\overrightarrow{CD} = \{-3;\ 3;\ 4\}$;

$\overrightarrow{AD} = \{0-6;\ 4-3;\ 5-3\} = \{-6; 1;\ 2\}$;

$\overline{AB} + \overline{CD} = \{-7 + (-3), -3 + 3, -5 + 4\} = \{-10, 0, -1\}$

$$\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)\cdot \overline{AD} = -10\cdot(-6) + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 2 = 58$$

Задание 5

Решение:

$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$,

$\overline{BD} = \{0 - (-1), 4 - 0, 5 - (-2)\} = \{1, 4, 7\}$,

$\overline{AC} = \{3 - 6, 1 - 3, 1 - 3\} = \{-3, -2, -2\}$,

$\overline{BD} + \overline{AC} = \{1 + (-3), 4 + (-2), 7 + (-2)\} = \{-2, 2, 5\}$.

$$Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD} + \overline{AC}\right) = \frac{-7\cdot(-2) + (-3)\cdot 2 + (-5)\cdot 5}{\sqrt{(-7)^2 + (-3)^2 + (-5)^2}} = \frac{-17}{\sqrt{83}}.$$

Задание 6

Решение:

$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$, $\overline{CD} = \{-3, 3, 4\}$

$\dfrac{-7}{-3} \neq \dfrac{-3}{3} \neq \dfrac{-5}{4} \Rightarrow$ векторы не являются коллинеарными.

Задание 7

Решение:

$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$, $\overline{CD} = \{-3, 3, 4\}$

$-7\cdot(-3) + (-3)\cdot 3 + (-5)\cdot 4 = -8 \neq 0$, следовательно, векторы не являются ортогональными.

Задания к самостоятельной работе №5

1 A (2; 3; -1); B (0; 1; 2); C (4; -1; -1); D (2; -3; 1)

2 A (3; -1; 1); B (1; 3; 2); C (1; -1; -1); D (4; 0; 3)

3 A (4; 1; 2); B (1; 0; 1); C (-1; 2; -1); D (3; 1; 0)

4 A (3; -2; 1); B (2; -1; 1); C (4; 0; 2); D (1; 1; -1)

5 A (-2; 2; 1); B (3; 0; 4); C (7; 1; 0); D (3; 0; 5)

6 A (1; -1; -1); B (2; 5; 7); C (-3; 1; -1); D (2; 2; 3)

7 A (-3; 1; 4); B (1; -2; -3); C (2; 2; 3); D (5; 3; 1)

8 A (2; -5; 1); B (4; 3; 5); C (-1; 0; 1); D (2; 1; 0)

9 A (-2; 2; 1); B (3; -1; 0); C (4; 4; 0); D (1; -1; 1)

10 A (4; 2; 5); B (0; 1; 3); C (-1; -1; 1); D (2; -2; 1)

11 A (1; 0; 1); B (7; 4; 3); C (3; -5; 1); D (-2; 2; 2)

12 A (5; 1; 0); B (-1; -1; -1); C (2; 4; 7); D (1; 0; 1)

13 A (10; 1; 1); B (-2; -1; 1); C (4; 3; 2); D (1; 0; -1)

14 A (2; -7; 4); B (2; -1; 3); C (1; 0; -1); D (2; 1; 3)

15 A (6; 3; 3); B (-1; 0; -2); C (3; 1; 1); D (0; 4; 5)

16 A (3; 2; 0); B (2; -1; 7); C (4; 0; 5); D (1; -2; -1)

17 A (4; -1; 2); B (1; 0; 3); C (-2; 1; 5); D (3; 8; -1)

18 A (1; 1; -3); B (-7; 5; 2); C (2; 1; 0); D (3; -3; 1)

19 A (5; 0; 1); B (2; -1; -1); C (-6; -1; 1); D (3; 1; 3)

20 A (3; 5; 1); B (7; -4; 3); C (2; 1; 1); D (0; -1; 3)

21 A (1; -2; 1); B (-1; 8; -3); C (3; 2; 1); D (5; 3; 1)

22 A (-3; -1; 1); B (2; -3; 0); C (1; 4; 5); D (2; 3; 4)

23 A (3; -1; 2); B (4; 0; 4); C (-1; 9; -1); D (3; -2; -2)

24 A (3; -2; 1); B (4; 2; 1); C (-1; -1; 1); D (3; 0; 1)

25 A (-2; 0; 1); B (4; -1; 3); C (-3; 2; 1); D (4; 1; 1)

26 A (2; -2; 1); B (2; 5; 7); C (1; 3; 5); D (7; 0; 3)

27 A (2; 3; 3); B (-2; 4; 1); C (3; 5; 2); D (3; 8; -1)

28 A (1; 1; -3); B (-3; 2; -1); C (4; 1; 2); D (7; -3; 0)

29 A (7; 6; 1); B (2; -1; -1); C (1; 0; 1); D (-2; 1; -1)

30 A (-7; 2; -1); B (2; 5; 1); C (2; 1; 1); D (0; 1; 3)

Критерии оценок

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 91% -100% предлагаемых заданий, допустим 2 недочета, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 81% -90% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% -80% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

Самостоятельная работа №6 (20час)

Тригонометрические тождества

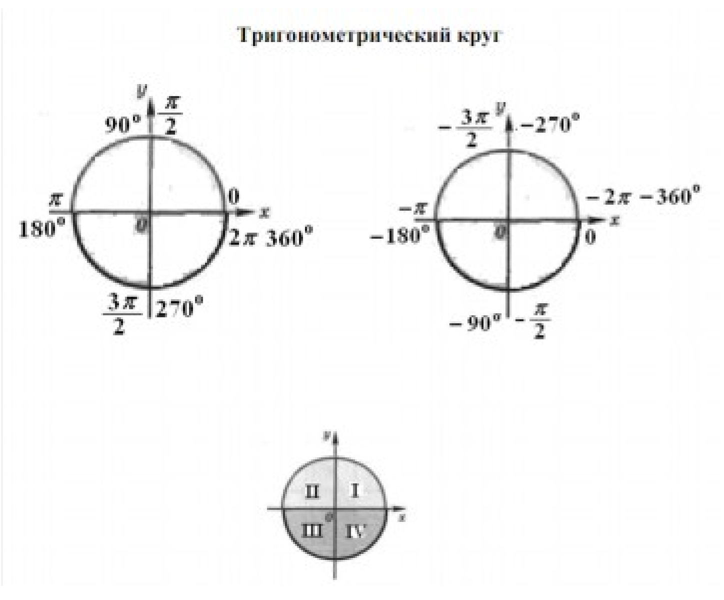
Цели: научиться выполнять преобразования тригонометрических выражений с применением основных тригонометрических тождеств, закрепить навыки определения типов тригонометрических уравнений (простейшее, квадратное относительно $\sin x,\ \cos x,\ tgx$, однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$, уравнение, решаемое разложением на множители левой части), усвоить алгоритмы решения основных типов тригонометрических уравнений.

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.
Теоретический материал



Перевод градусов в радианы

Формула перевода радиан в градусы:

Пример 1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ение. Из основного тригонометрического тожде-
получаем:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

Теперь остаётся извлечь квадратный корень и поставить правильный знак у синуса. Вот для этого и дана дополнительная информация об угле.

Точка α расположена в первой четверти, так что $\sin\alpha > 0$ (рис. 1). Поэтому

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}.$$

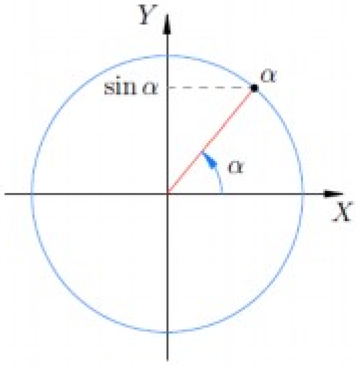


Рис. 1. $\sin\alpha > 0$

Пример 2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Действуем по той же схеме. Из основного тригонометрического тождества находим:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Точка α расположена во второй четверти (рис. 2), так что $\cos\alpha < 0$. Стало быть, извлекая корень, ставим знак минус:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

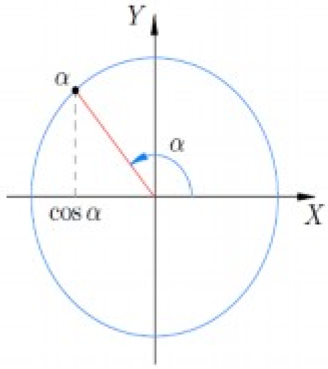


Рис. 2. $\cos\alpha < 0$

Пример 3. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из соотношения (2) находим:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{5}.$$

По основному тригонометрическому тождеству получаем также:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{4}{5}.$$

Точка α расположена в третьей четверти (рис. 3). Синус и косинус там отрицательны, следовательно:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

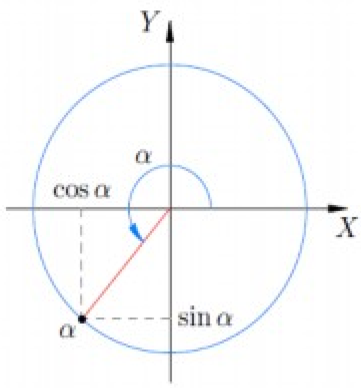


Рис. 3. $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$

№

Докажите тождество:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

$$\cos^2 = 1 - 2\cdot\frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Из основного тригонометрического тождества найдем $\cos\alpha$*:*

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5};$$

Далее найдем значения искомых выражений:

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25};\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7};$$

Ответ: $\sin 2\alpha = \frac{24}{25},\ \cos 2\alpha = -\frac{7}{25},\ \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}.$

Упростить выражение: $4\sin^2\alpha + 5 - 4\cos^2\alpha$.

Решение: $4\sin^2\alpha + 5 - 4\cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 5 = 4(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + 5 =$

$= 4\cos 2\alpha + 5$. **Ответ.** $4\cos 2\alpha + 5$.

Формулы приведения.

Пример:

Используя таблицу формул приведения получим:

Ответ:

Решение. Используя формулы приведения, получим:

$$\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{29\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}}+7=$$

$$=\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{\cos\left(8\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}+7=$$

$$=\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}+7=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}+7=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-4+7=0.$$

Синус, косинус и тангенс суммы и разности и сложения.

Формулы сложения

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)/(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta))$$

Синус, косинус и тангенс половинного угла

$$\sin^2(\alpha/2)=(1-\cos\alpha)/2$$

$$\cos^2(\alpha/2)=(1+\cos\alpha)/2$$

$$\operatorname{tg}^2(\alpha/2)=(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)$$

$$\sin\alpha=2\operatorname{tg}(\alpha/2)/(1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2))$$

$$\cos\alpha=(1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2))/(1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2))$$

tg α = 2tg (α/2) / (1 - tg^2 (α/2))

Пример 1. Упростить выражение

$$\sin 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \sin 2\alpha - \cos (2\pi - \alpha).$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}, \text{ т.к. } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin y = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}, \text{ т.к. } \pi < y < \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -1$$

Решение. По формуле (3) получим

$$\sin 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \sin 2\alpha - \cos (2\pi - \alpha) = \sin 5\alpha - \cos \alpha.$$

Ответ. $\sin 5\alpha - \cos \alpha$.

Пример 2

Применили формулу

Пример 3) Найти значение выражения

$$\sqrt{6}\,(\sin^2 x - \cos^2 x), \text{ если } \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}.$$

Решение.

$$\sqrt{6}\,(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sqrt{6} \cos 2\alpha.$$

Найдем $\cos 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\sqrt{6}\,(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\sqrt{6}\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=2.$$

Ответ. 2.

Тригонометрические уравнения.

ПРИМЕР 1. Вычислите: $2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\text{arcctg}1$.

РЕШЕНИЕ.

$$2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\text{arcctg}1=$$

$$=-2\arcsin\frac{1}{2}+\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+\text{arctg}1=-2\cdot\frac{\pi}{6}+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}.$$

ПРИМЕР 2. Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-1$.

РЕШЕНИЕ.

По формуле частного случая:

$$\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ -x=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ -x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \ x=\frac{3\pi}{4}-2\pi n,\ n\in Z.$$

ПРИМЕР 3. Решите уравнение: $2\cos 3x=-\sqrt{2}$.

РЕШЕНИЕ.

Разделим левую и правую части уравнения на 2: $\cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле $t=\pm\arccos a+2\pi n$ получаем:

$$3x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ \ 3x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi n,\ \ 3x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n.$$

Разделим левую и правую части уравнения на 3: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$.

ПРИМЕР 4. Решите уравнение: $3\text{tg}\frac{5}{3}x-1=0$.

РЕШЕНИЕ.

Выразим $\text{tg}\frac{5}{3}x$: $3\text{tg}\frac{5}{3}x=1,\ \ \text{tg}\frac{5}{3}x=\frac{1}{3}$.

По формуле $t = arctg a + \pi n$ получаем: $\frac{5}{3}x = arctg\frac{1}{3} + \pi n$.

Разделим левую и правую части уравнения на $\frac{5}{3}$: $x = \frac{3}{5}arctg\frac{1}{3} + \frac{3\pi n}{5}$, $n \in Z$.

ПРИМЕР 5. Решите уравнение: $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Применив основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим:

$$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x + 1 = 0,$$

$$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0,$$

$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Обозначим $\cos x = y$, тогда
$2y^2 + 5y - 3 = 0$. Полученное уравнение имеет решения

$$y_1 = -3, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Составим два простейших уравнения:

$$\cos x = -3 \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $-1 \le \cos x \le 1$. Второе уравнение имеет решение:

$$x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

ПРИМЕР 6. Решите уравнение: $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2$.

РЕШЕНИЕ.

Так как по формуле приведения $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos^2 x$, а $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ по формуле двойного угла, то

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x - 2 = 0.$$

При помощи основного тригонометрического тождества заменим 2 на $2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ и получим:

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$

откуда

$$sin^2 x - 4 sin x cos x + 3 cos^2 x = 0 .$$

Это уравнение является однородным относительно $sin\, x$ и $cos x$. Разделив обе части полученного уравнения на $cos^2 x$, получим

$$tg^2 x - 4tgx + 3 = 0 .$$

Это уравнение является квадратным относительно tgx. Обозначим $tgx = y$, тогда $y^2 - 4y + 3 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $y_1 = 1, \; y_2 = 3$. Из уравнения $tgx = 1$ получаем

$$x_1 = arctg1 + \pi n,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из уравнения $tgx = 3$ получаем

$x_2 = arctg3 + \pi k$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in Z, \; arctg3 + \pi k, \; k \in Z$

ПРИМЕР 7. Решите уравнение: $cos 2x = cos 6x$.

РЕШЕНИЕ.

Запишем данное уравнение иначе:

$$cos 2x - cos 6x = 0.$$

По формуле разности косинусов $cos\, x - cos\, y = -2\, sin \frac{x+y}{2} sin \frac{x-y}{2}$ получаем:

$$2 sin 4x\, sin 2x = 0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому если $sin 4x = 0$, то $4x = \pi n, \; x_1 = \frac{\pi n}{4}, \; n \in Z$; если $sin 2x = 0$, то $2x = \pi k, \; x_2 = \frac{\pi k}{2}. \; k \in Z$.

Можно заметить, что вторая серия решений содержится в первой и иначе записать ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4}, \; n \in Z$.

ПРИМЕР 8. Решите уравнение: $sin 3x = 2 cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

РЕШЕНИЕ.

В правой части применим формулу приведения

$$sin3x = 2\,sin\,x\,,$$

$$sin3x - sin\,x - sin\,x = 0\,,$$

$$(sin3x - sin\,x) - sin\,x = 0\,.$$

Применим формулу разности синусов $sin\,x - sin\,y = 2\,sin\dfrac{x-y}{2}cos\dfrac{x+y}{2}$, тогда

$$2\,sin\,x\,cos\,2x - sin\,x = 0\,.$$

Вынесем за скобки общий множитель:

$$sin\,x(2\,cos\,2x - 1) = 0\,.$$

Если $sin\,x = 0$, то $x_1 = \pi n$; если $2cos\,2x - 1 = 0$, то $2cos\,2x = 1,\ cos\,2x = \dfrac{1}{2}$, значит,

$2x = \pm arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi k,\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x_2 = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$.

Ответ: $\pi n,\ n \in Z;\ \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения по теме: « Основы тригонометрии»

ВАРИАНТ 1	**ВАРИАНТ 2**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $2\sin^2 x - 5\sin x - 7 = 0$ **2**. $12\sin^2 x + 20\cos x - 19 = 0$ **3**. $3\sin^2 x + 14\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ **4**. $7\,\mathrm{tg}\,x - 10\mathrm{ctg}\,x + 9 = 0$ **5**. $5\sin 2x - 14\cos^2 x + 2 = 0$ **6**. $9\cos 2x - 4\cos^2 x = 11\sin 2x + 9$	Решите тригонометрические уравнения: **1**.$10\cos^2 x - 17\cos x + 6 = 0$ **2**.$2\cos^2 x + 5\sin x + 5 = 0$ **3**.$6\sin^2 x + 13\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ **4**.$5\,\mathrm{tg}\,x - 4\mathrm{ctg}\,x + 8 = 0$ **5**.$6\cos^2 x + 13\sin 2x = -10$ **6**.$2\sin^2 x + 6\sin 2x = 7(1 + \cos 2x)$

ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**

Решите тригонометрические уравнения: **1**. $3\sin^2 x - 7\sin x + 4 = 0$ **2**. $6\sin^2 x - 11\cos x - 10 = 0$ **3**. $\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$ **4**. $4\,\mathrm{tg}\, x - 12\mathrm{ctg}\, x + 13 = 0$ **5**. $5 - 8\cos^2 x = \sin 2x$ **6**. $7\sin 2x + 9\cos 2x = -7$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $10\cos^2 x + 17\cos x + 6 = 0$ **2**. $3\cos^2 x + 10\sin x - 10 = 0$ **3**. $2\sin^2 x + 9\sin x \cos x + 10\cos^2 x = 0$ **4**. $3\,\mathrm{tg}\, x - 12\mathrm{ctg}\, x + 5 = 0$ **5**. $10\sin^2 x - 3\sin 2x = 8$ **6**. $11\sin 2x - 6\cos^2 x + 8\cos 2x = 8$

ВАРИАНТ 5	**ВАРИАНТ 6**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $10\sin^2 x + 11\sin x - 8 = 0$ **2**. $4\sin^2 x - 11\cos x - 11 = 0$ **3**. $4\sin^2 x + 9\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ **4**. $3\,\mathrm{tg}\, x - 8\mathrm{ctg}\, x + 10 = 0$ **5**. $3\sin 2x + 8\sin^2 x = 7$ **6**. $10\sin^2 x + 11\sin 2x + 6\cos 2x = -6$	Решите тригонометрические уравнения: **1**.$3\cos^2 x - 10\cos x + 7 = 0$ **2**.$6\cos^2 x + 7\sin x - 1 = 0$ **3**.$3\sin^2 x + 10\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$ **4**.$6\,\mathrm{tg}\, x - 14\mathrm{ctg}\, x + 5 = 0$ **5**.$6\sin^2 x + 7\sin 2x + 4 = 0$ **6**.$7 = 7\sin 2x - 9\cos 2x$

ВАРИАНТ 7	**ВАРИАНТ 8**
Решите тригонометрические уравнения: **1**. $6\sin^2 x - 7\sin x - 5 = 0$ **2**. $3\sin^2 x + 10\cos x - 10 = 0$ **3**. $2\sin^2 x + 11\sin x \cos x + 14\cos^2 x = 0$ **4**. $3\,\mathrm{tg}\, x - 5\mathrm{ctg}\, x + 14 = 0$ **5**. $10\sin^2 x - \sin 2x = 8\cos^2 x$ **6**. $1 - 6\cos^2 x = 2\sin 2x + \cos 2x$	Решите тригонометрические уравнения: **1**. $3\cos^2 x - 5\cos x - 8 = 0$ **2**. $8\cos^2 x - 14\sin x + 1 = 0$ **3**. $5\sin^2 x + 14\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 0$ **4**. $2\,\mathrm{tg}\, x - 9\mathrm{ctg}\, x + 3 = 0$ **5**. $\sin^2 x - 5\cos^2 x = 2\sin 2x$ **6**. $5\cos 2x + 5 = 8\sin 2x - 6\sin^2 x$

ВАРИАНТ 9	ВАРИАНТ 10
Решите тригонометрические уравнения:	Решите тригонометрические уравнения:
1. $6\sin^2 x + 11\sin x + 4 = 0$	**1**.$4\cos^2 x + \cos x - 5 = 0$
2. $4\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$	**2**.$10\cos^2 x - 17\sin x - 16 = 0$
3. $3\sin^2 x + 11\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$	**3**.$\sin^2 x + 6\sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 0$
4. $5 \operatorname{tg} x - 8\operatorname{ctg} x + 6 = 0$	**4**.$3 \operatorname{tg} x - 6\operatorname{ctg} x + 7 = 0$
5. $\sin 2x + 1 = 4\cos^2 x$	**5**.$2\cos^2 x - 11\sin 2x = 12$
6. $14\cos^2 x + 3 = 3\cos 2x - 10\sin 2x$	**6**.$2\sin^2 x - 3\sin 2x - 4\cos 2x = 4$

Критерии оценок

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 91% -100% предлагаемых заданий, допустим 2 недочета, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 81% -90% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% -80% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

Самостоятельная работа №7 (12час)

Построение графиков функций. Функции. Свойства функций.

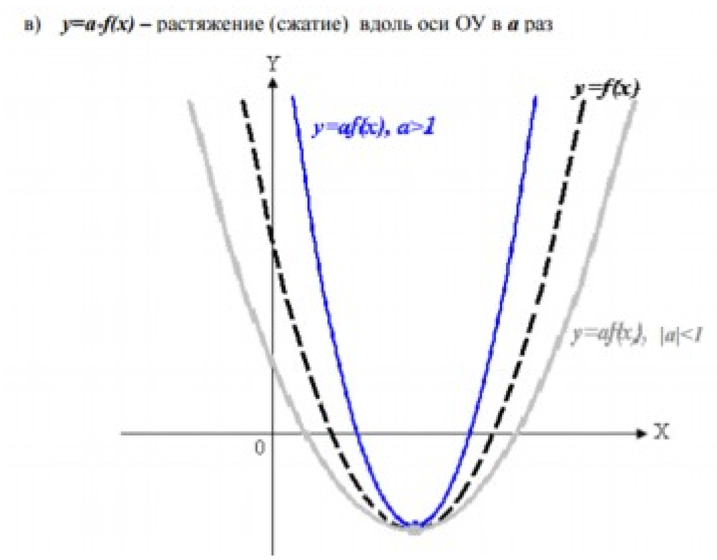
Цели: научиться строить графики функций, изучить свойства графиков степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Строить графики функций при различных показателях степени научиться определять свойства функций, изучить взаимно обратные функции.

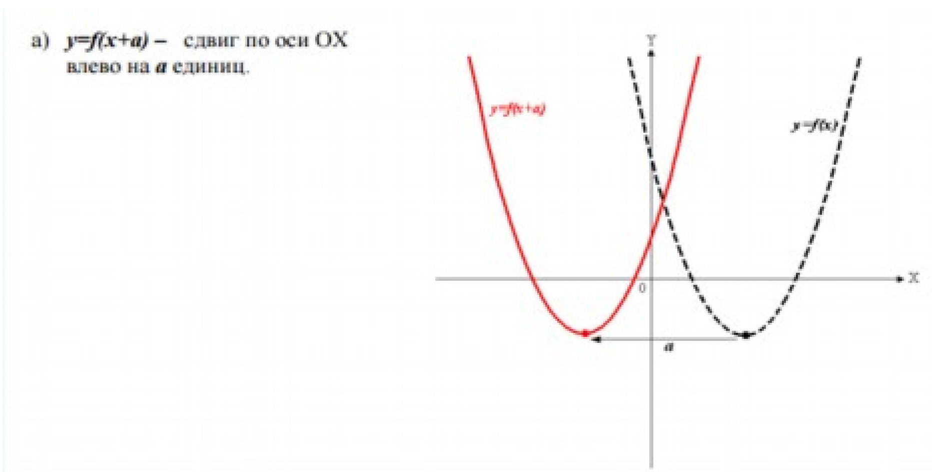
Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

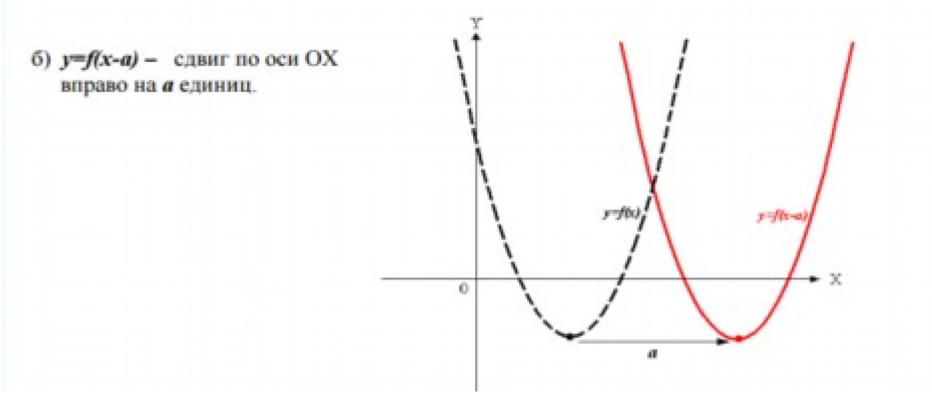
Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Постройте самостоятельно графики данных функций.

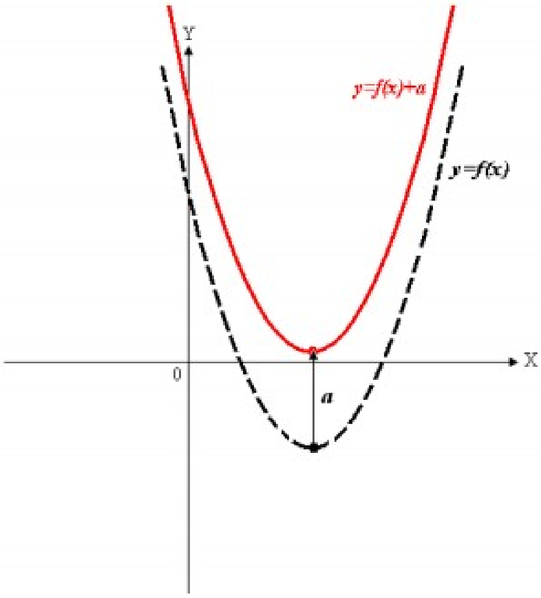
Ход работы.
Теоретический материал

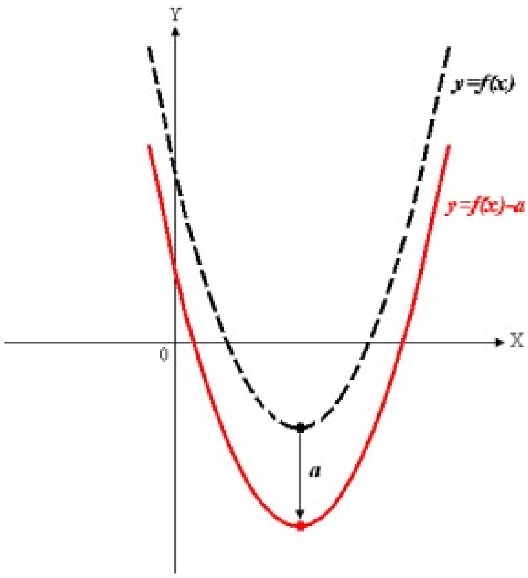






г) ***y=f(x)+a*** – сдвиг по оси ОУ вверх (вниз) на ***a*** единиц



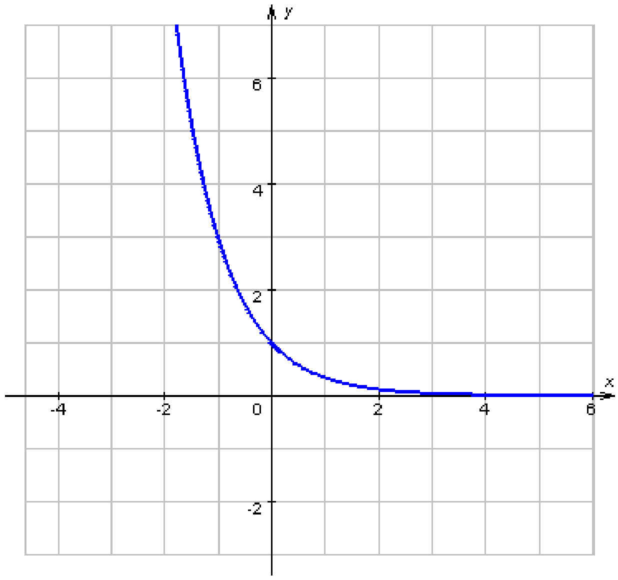
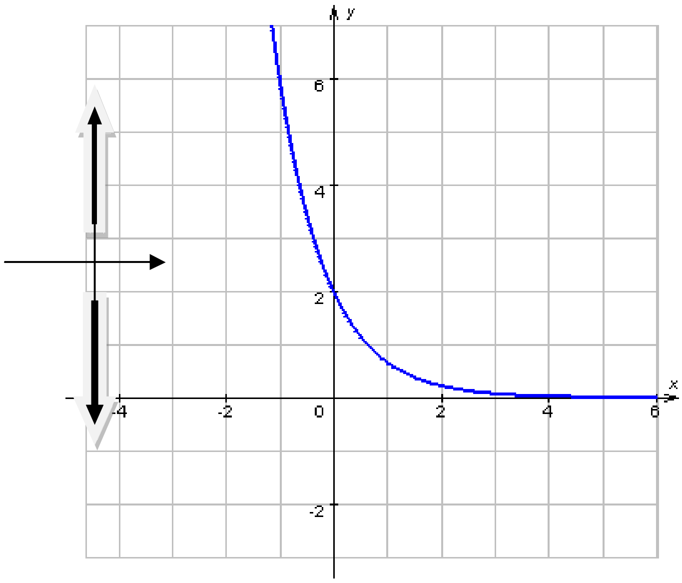
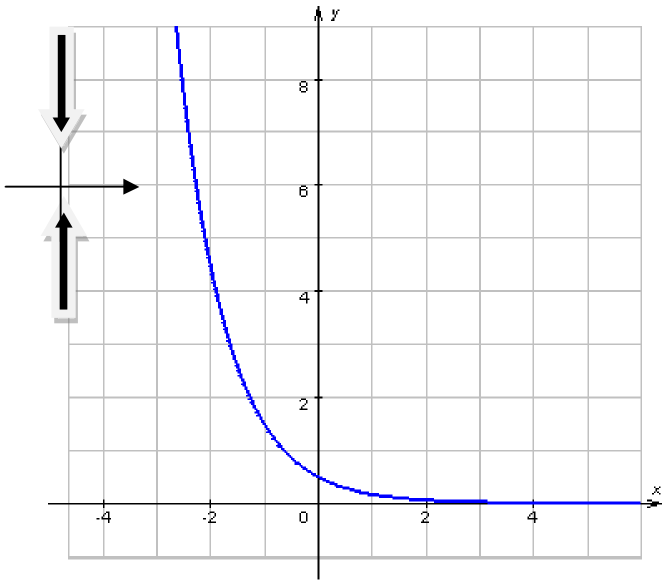


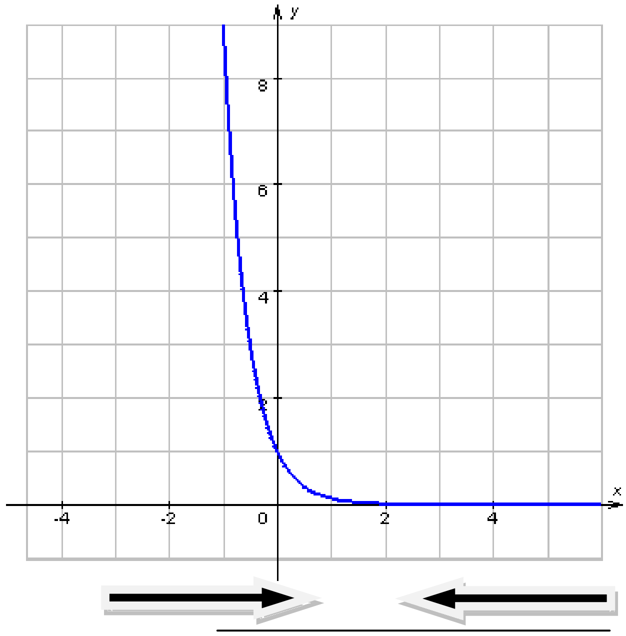
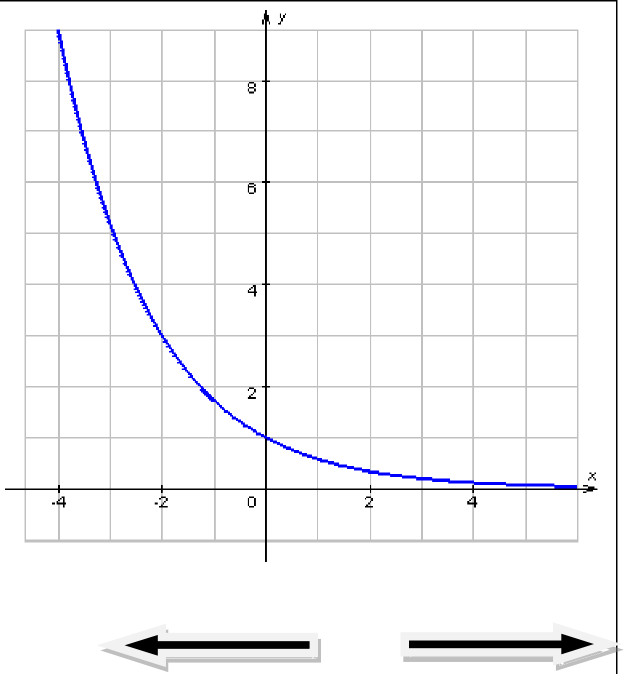
Преобразование графиков показательной (убывающей) функции

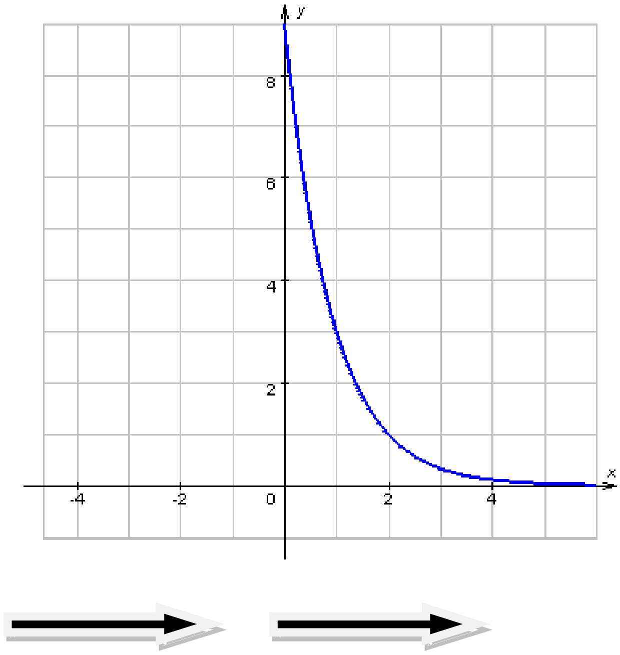
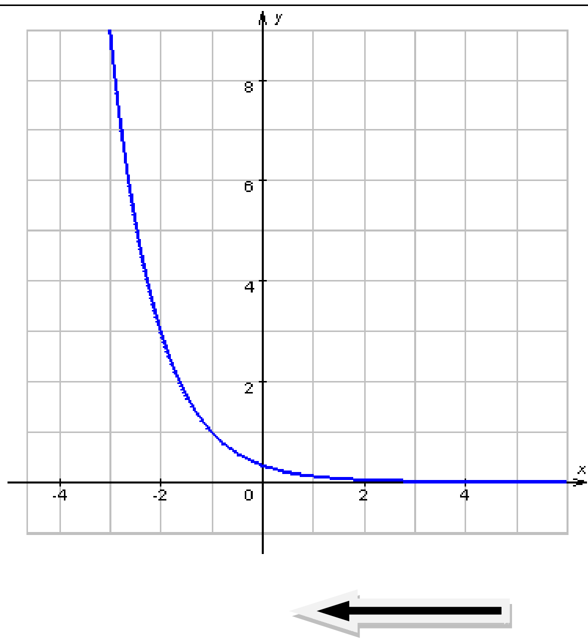
Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u>

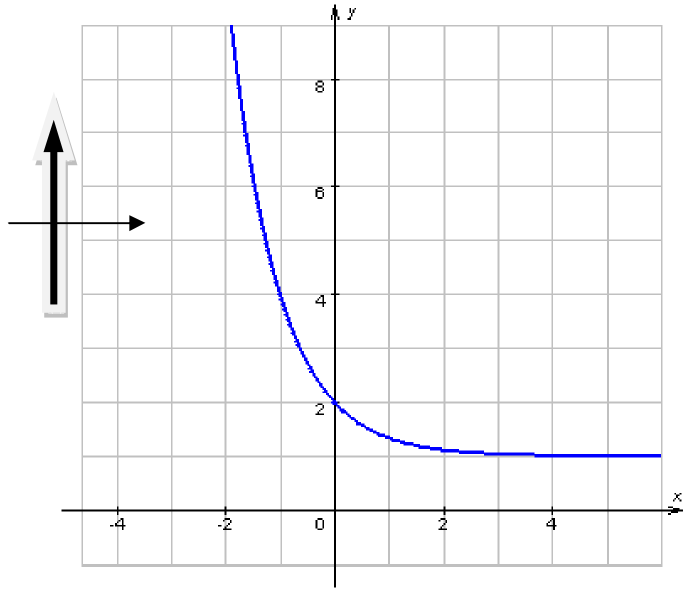
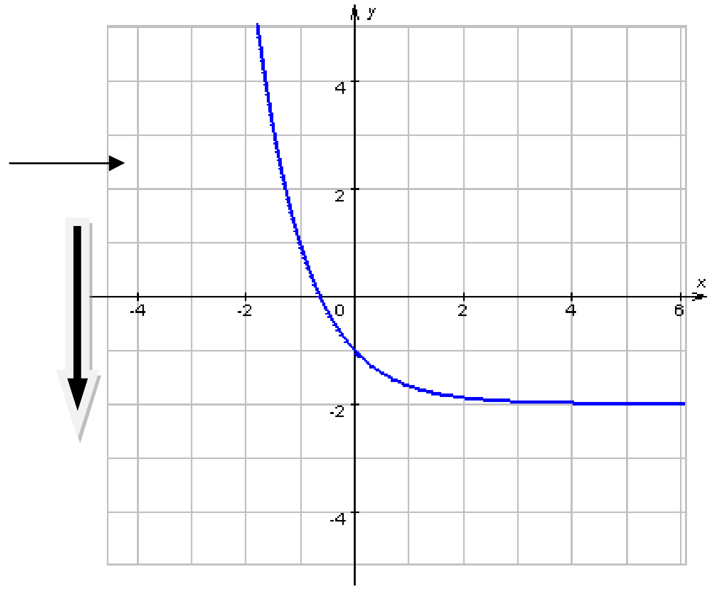
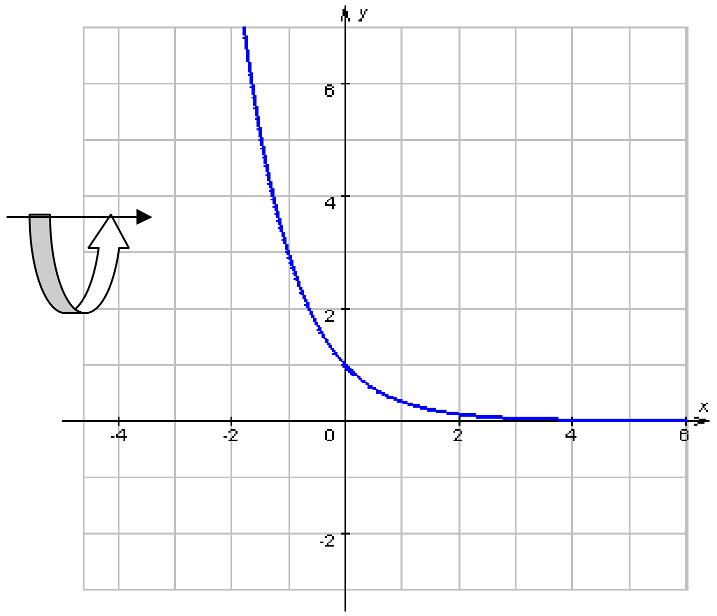
$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

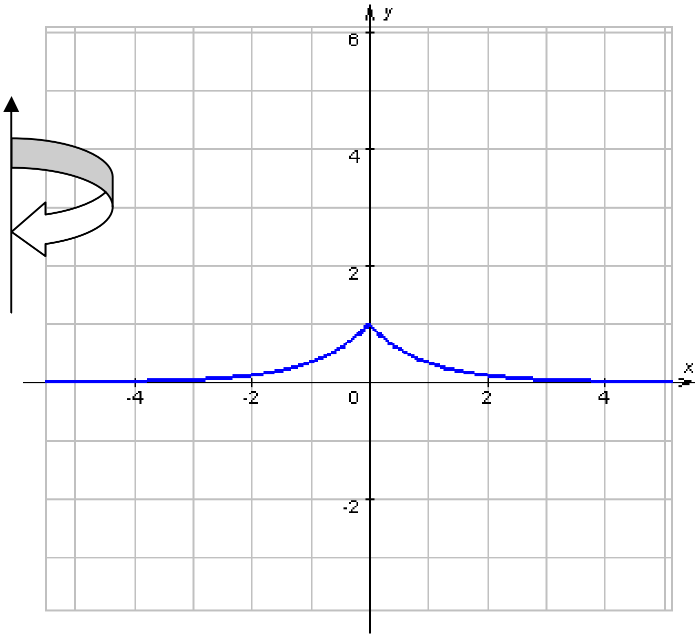
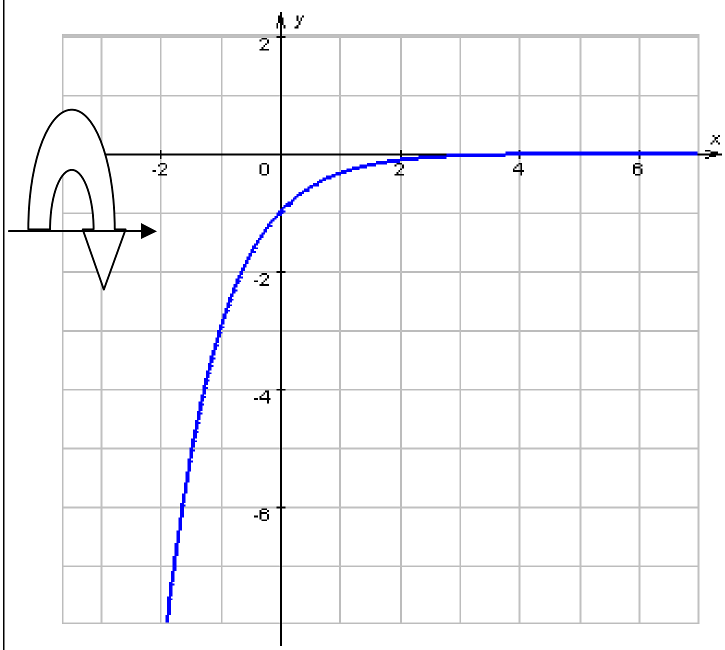
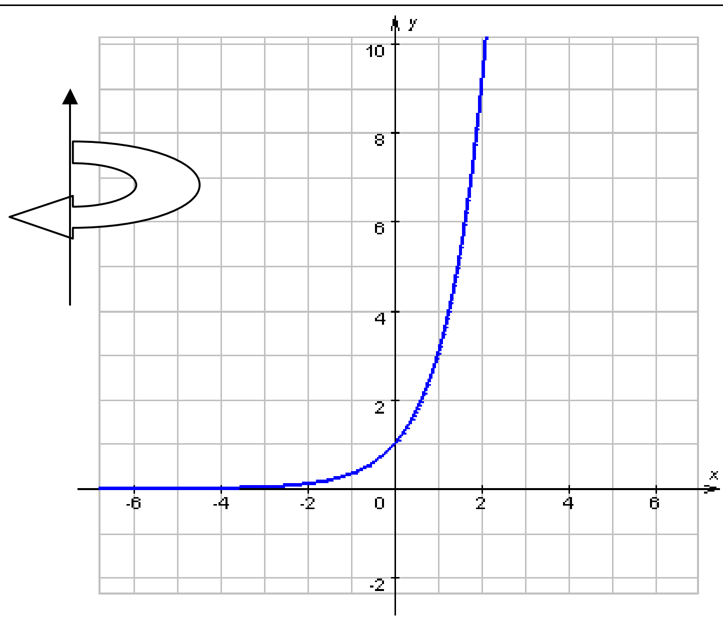
№	***Формула, комментарий***	***Графическая иллюстрация***

1	$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ ***«Основной» график***	
2	$y = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ ***<u>Растяжение</u>*** ***вдоль оси ОУ в 2 раза***	
3	$y = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ ***<u>Сжатие</u>*** ***вдоль оси ОУ в 2 раза***	

4	$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$ ***<u>Сжатие</u>*** ***вдоль оси ОХ в 2 раза***	
5	$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$$ ***<u>Растяжение</u>*** ***вдоль оси ОХ в 2 раза***	

6	$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$ ***<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>*** ***вдоль оси ОХ вправо на*** ***2 единичных отрезка***	
7	$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$ ***<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>*** ***вдоль оси ОХ влево на*** ***1 единичный отрезок***	

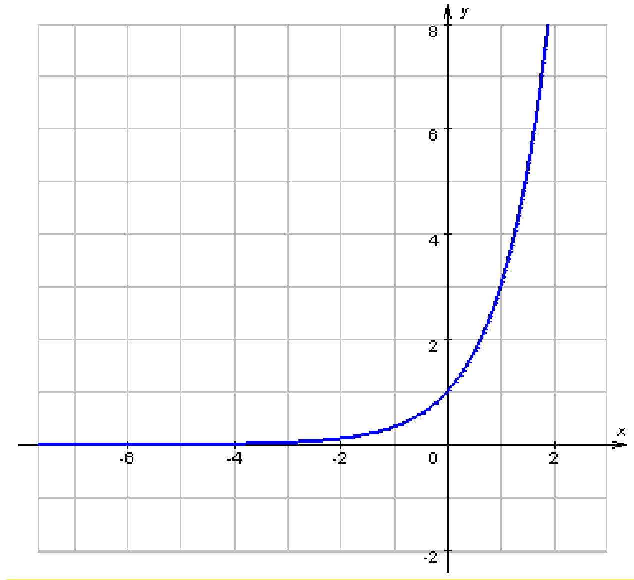
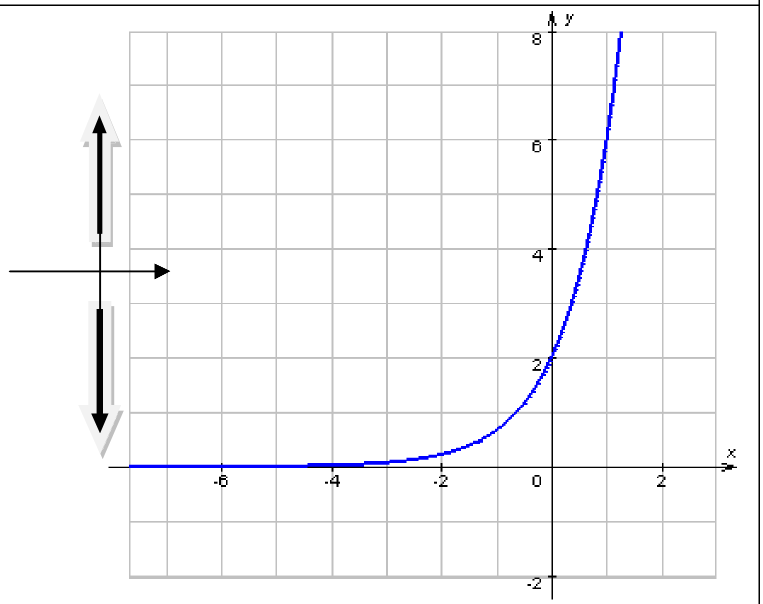
8	$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$$ ***Параллельный перенос (сдвиг)*** ***вдоль оси ОУ вверх на*** ***1 единичный отрезок***	
9	$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$$ ***Параллельный перенос (сдвиг)*** ***вдоль оси ОУ вниз на*** ***2 единичных отрезка***	
10	$$y = \left\lvert\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\rvert$$ ***Отражение*** ***относительно оси ОХ***	

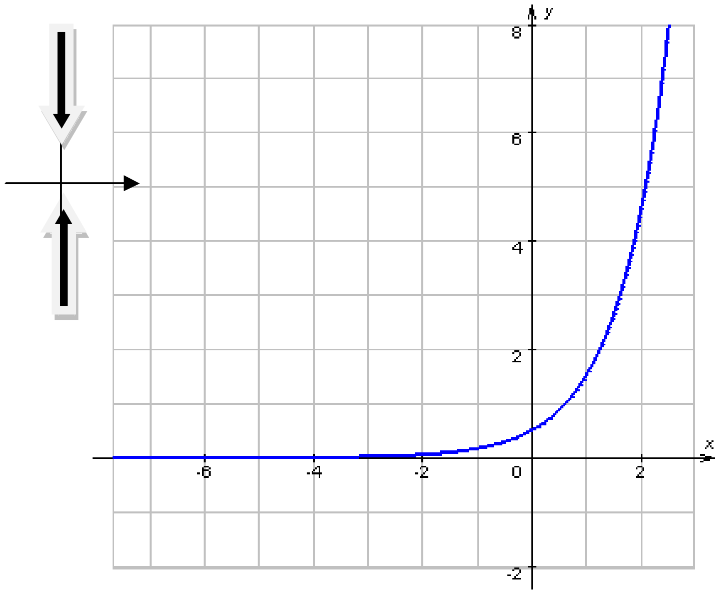
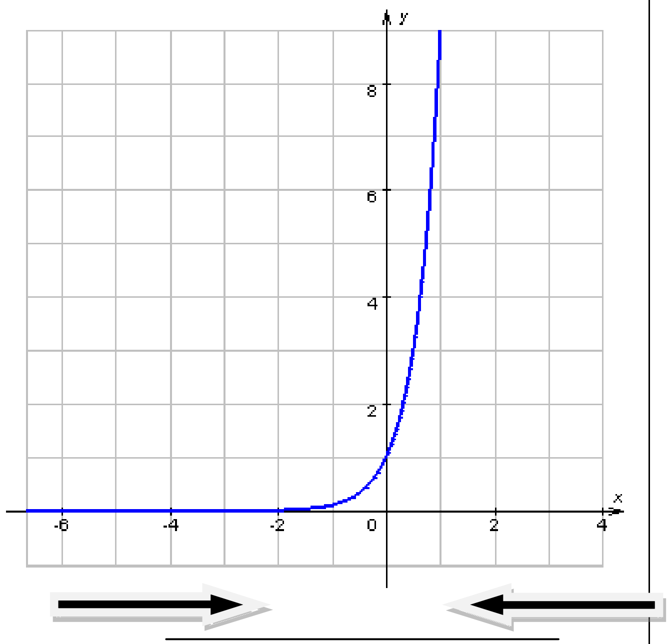
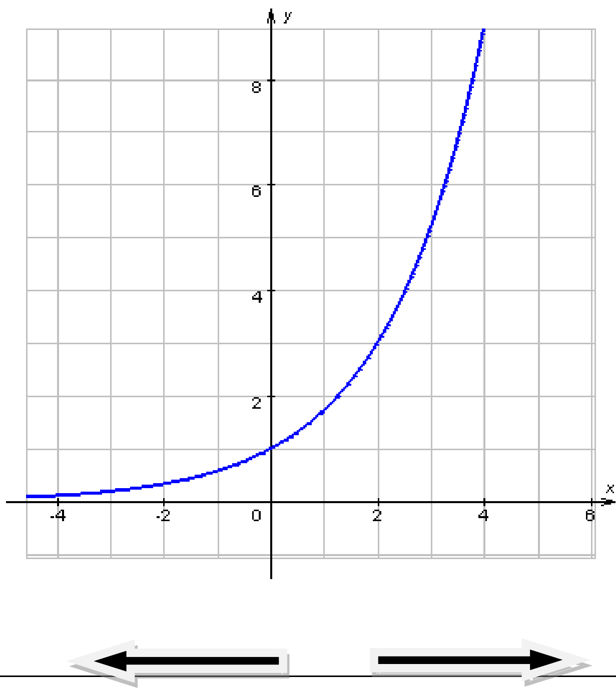
11	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\lvert x \rvert}$ ***<u>Отражение</u>*** ***относительно оси ОУ***	
12	$y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ ***<u>Поворот</u> на*** 180^{0} ***вокруг оси ОХ***	
13	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ ***<u>Поворот</u> на*** 180^{0} ***вокруг оси О****Y*	

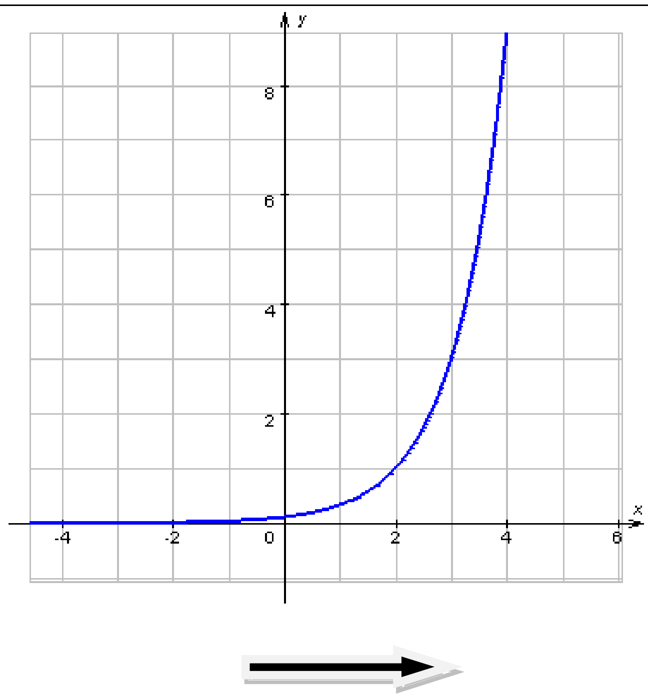
Преобразование графиков показательной (возрастающей) функции

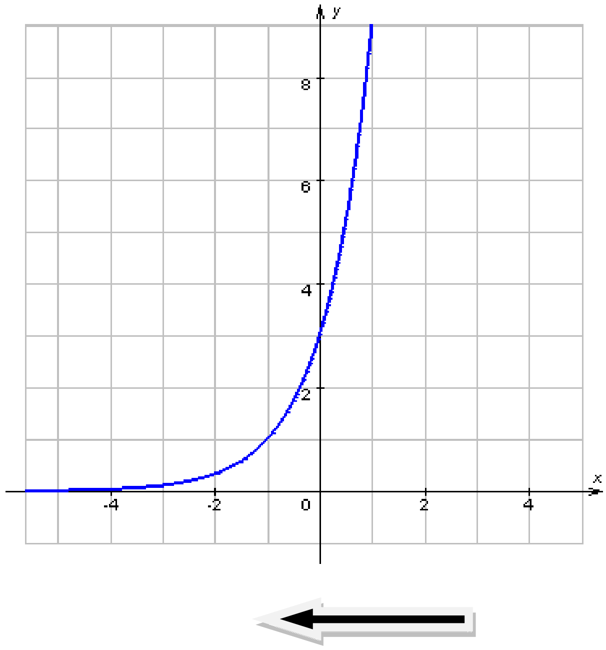
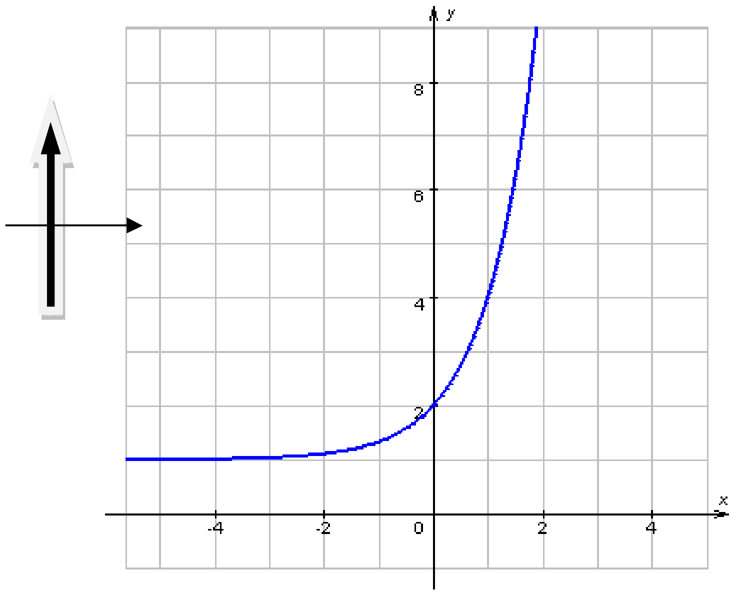
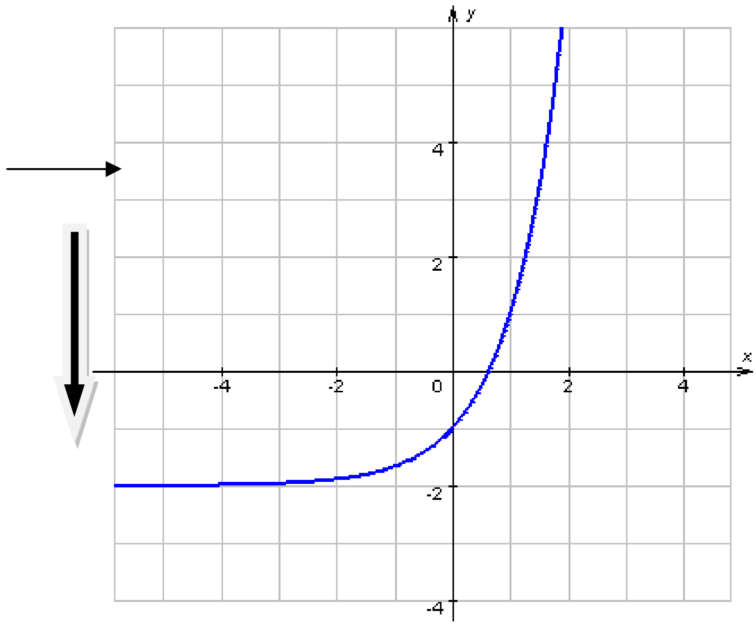
Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u>

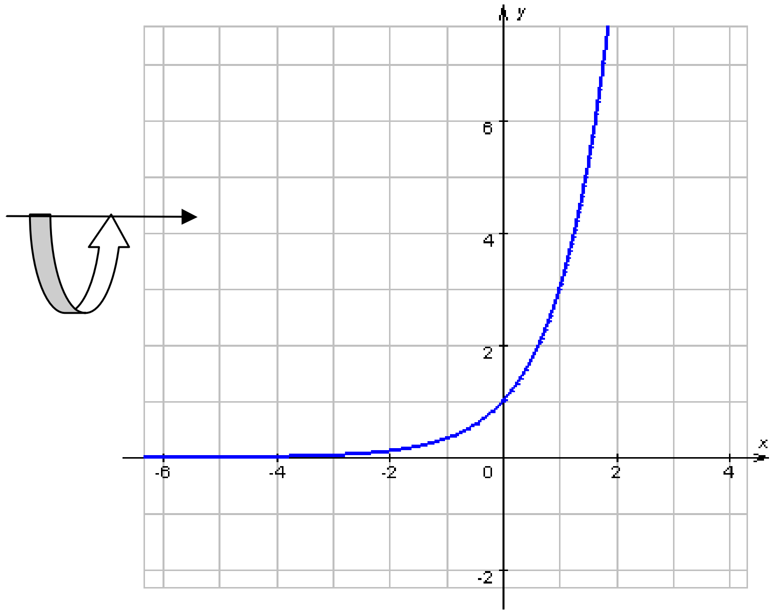
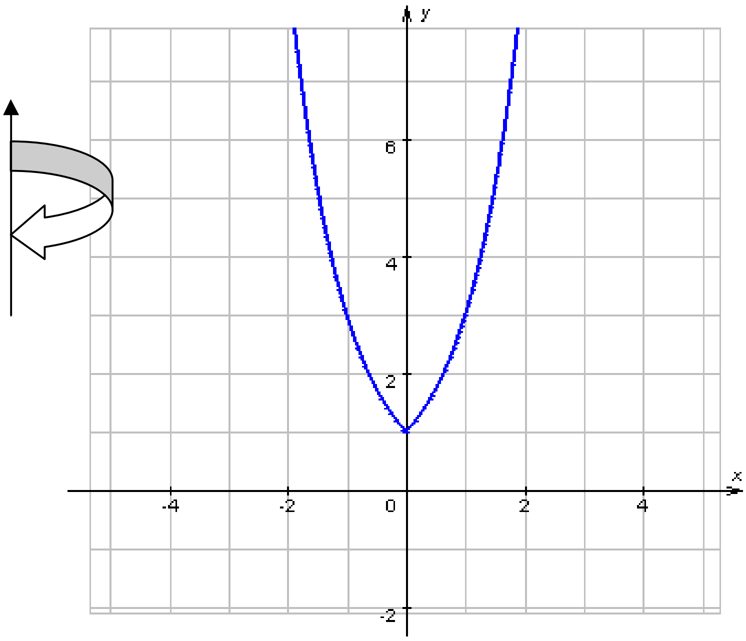
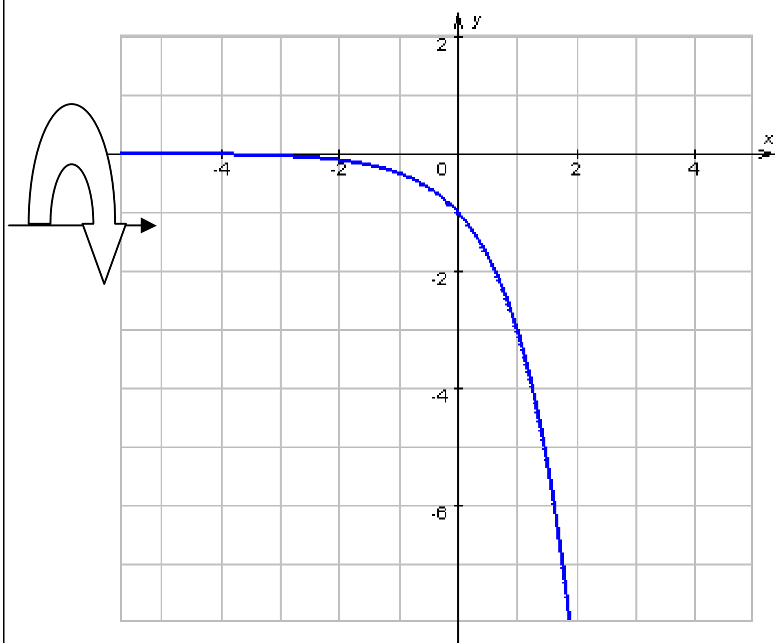
$$y = 3^x$$

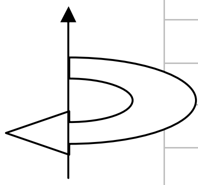
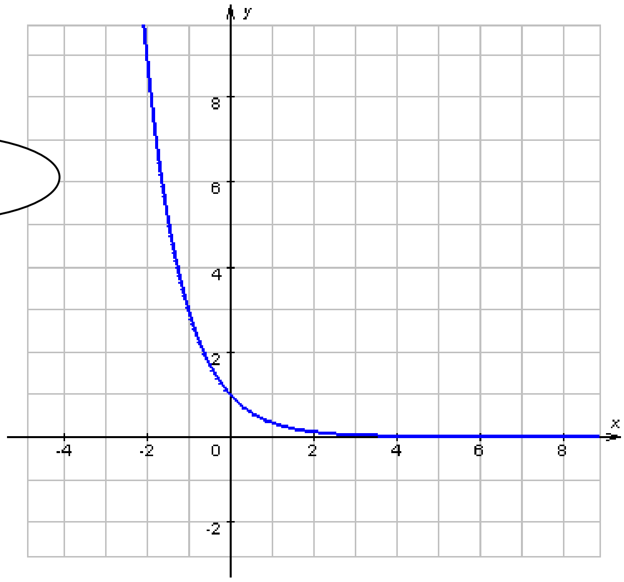
№	Формула, комментарий	Графическая иллюстрация
1	$y = 3^x$ **«Основной» график**	
2	$y = 2 \cdot 3^x$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОУ в 2 раза**	

3	$y = \dfrac{3^{x}}{2}$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОУ в** 2 **раза**	
4	$y = 3^{2x}$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОХ в** 2 **раза**	
5	$y = 3^{\frac{x}{2}}$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОХ в** 2 **раза**	

6	$y = 3^{x-2}$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ вправо на** 2 **единичных отрезка**	

7	$$y = 3^{x+1}$$ <u>**Параллельный перенос (сдвиг)**</u> **вдоль оси ОХ влево на** 1 **единичный отрезок**	
8	$$y = 3^{x} + 1$$ <u>**Параллельный перенос (сдвиг)**</u> **вдоль оси ОУ вверх на** 1 **единичный отрезок**	
9	$$y = 3^{x} - 2$$ <u>**Параллельный перенос (сдвиг)**</u> **вдоль оси ОУ вниз на** 2 **единичных отрезка**	

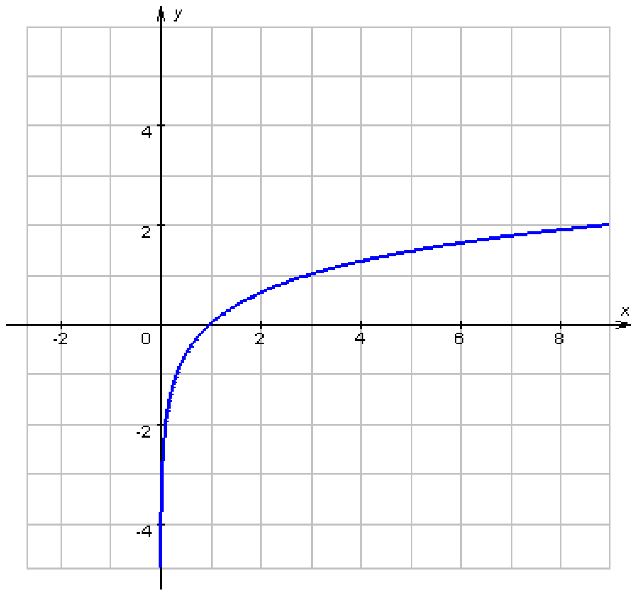
10	$y = \left\| 3^{x} \right\|$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОХ**	
11	$y = 3^{\|x\|}$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОУ**	
12	$y = -\left(3^{x}\right)$ **<u>Поворот</u> на** 180^{0} **вокруг оси ОХ**	

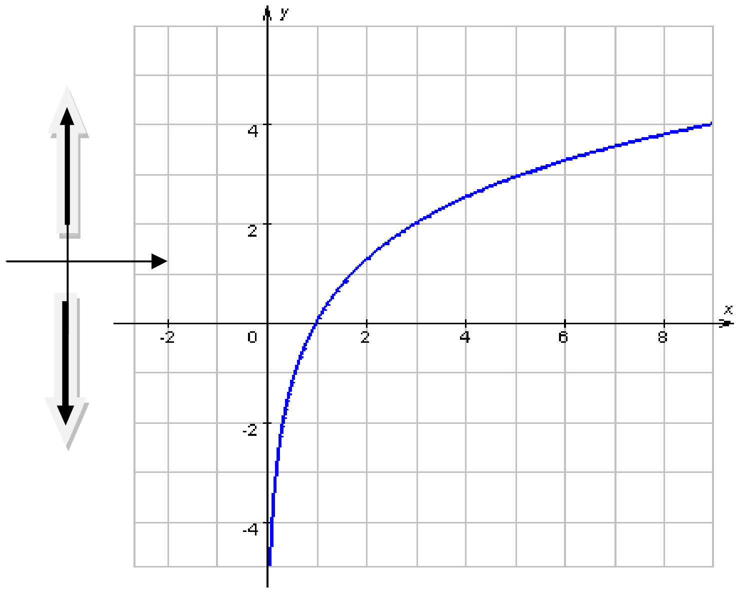
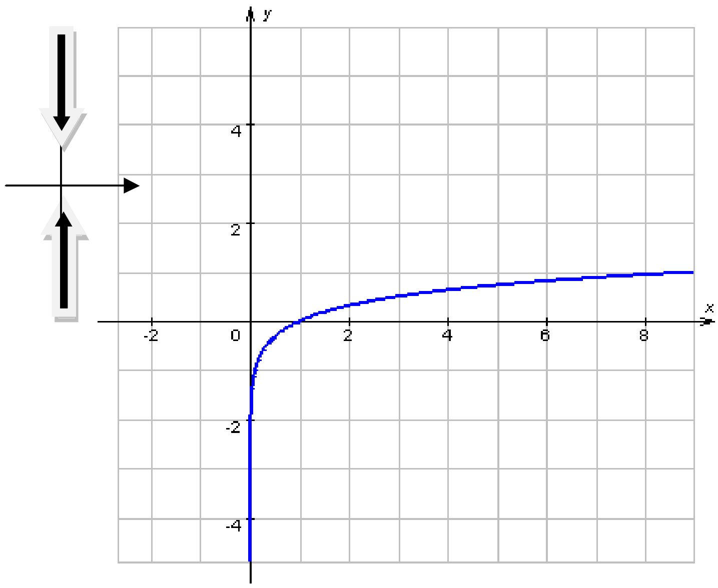
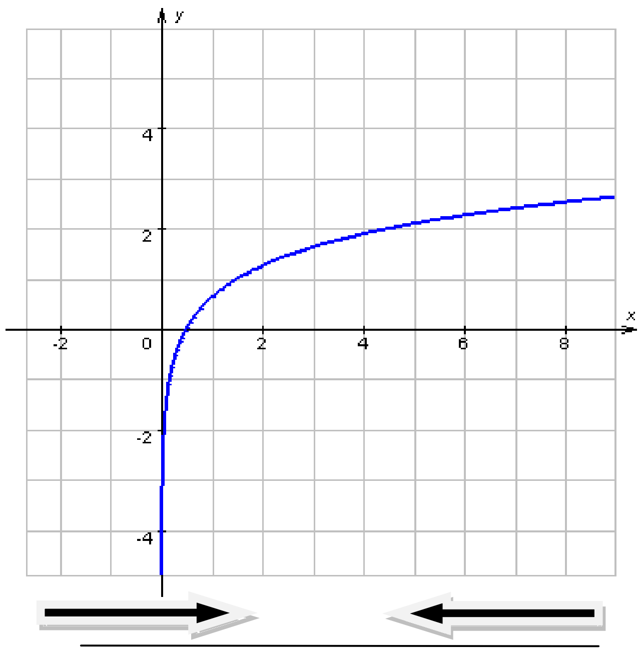
13	$y = 3^{(-x)}$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси О**Y	

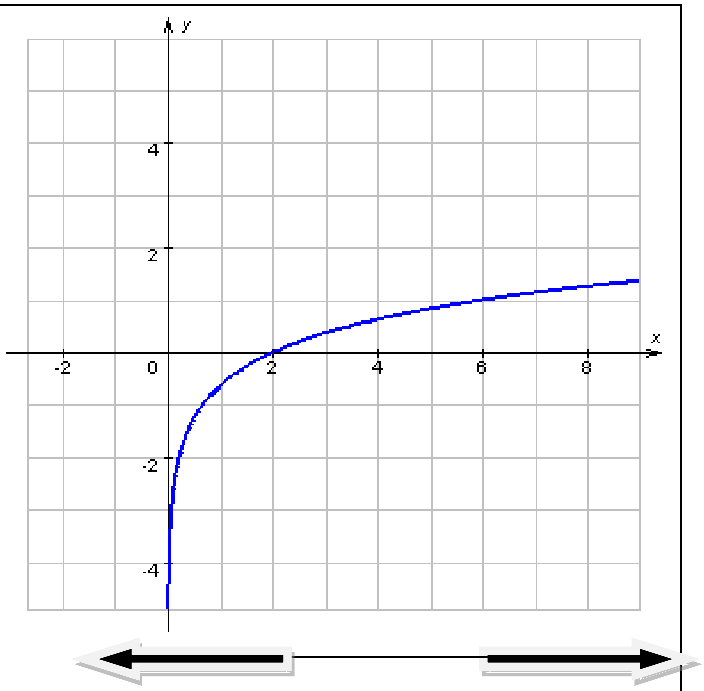
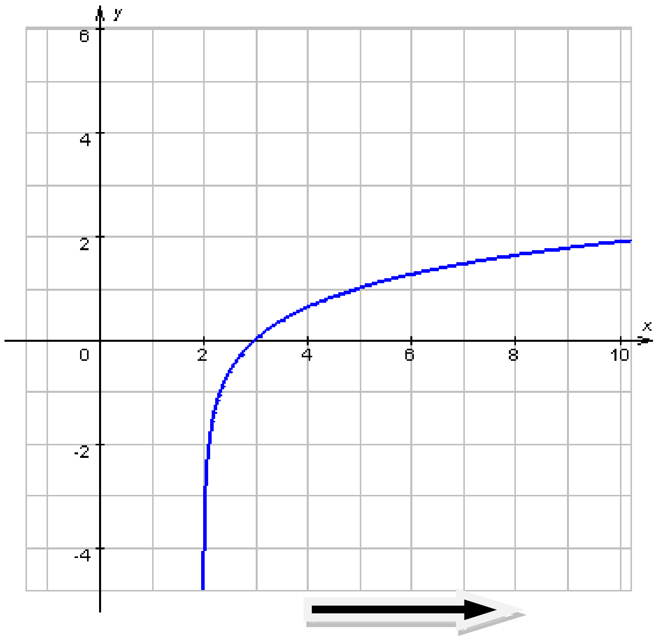
Преобразование графиков логарифмической (возрастающей) функции

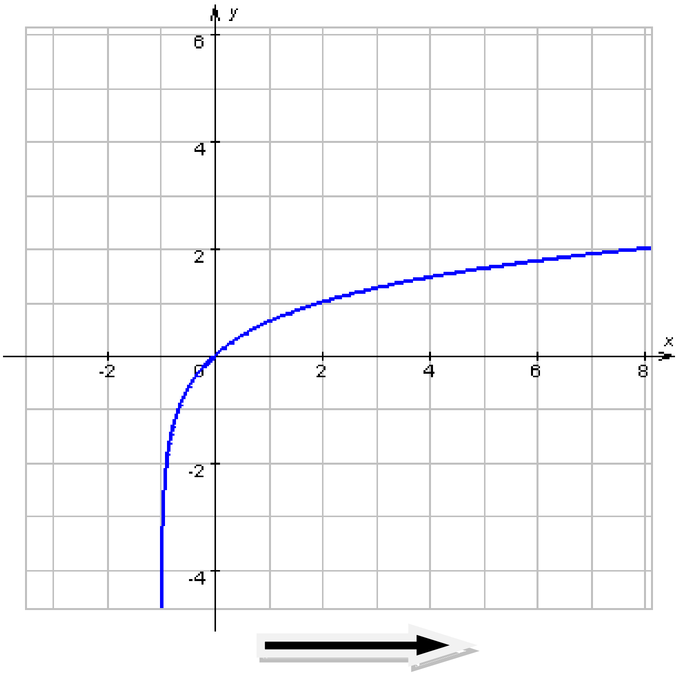
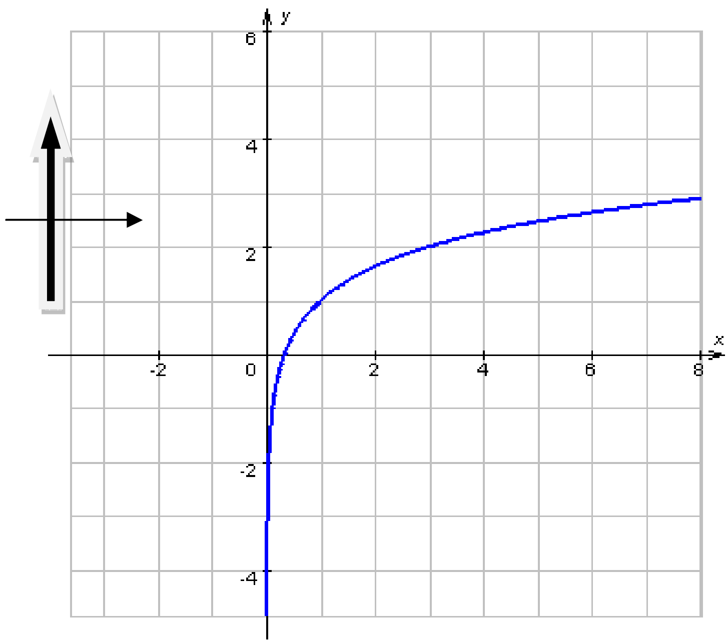
Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u>

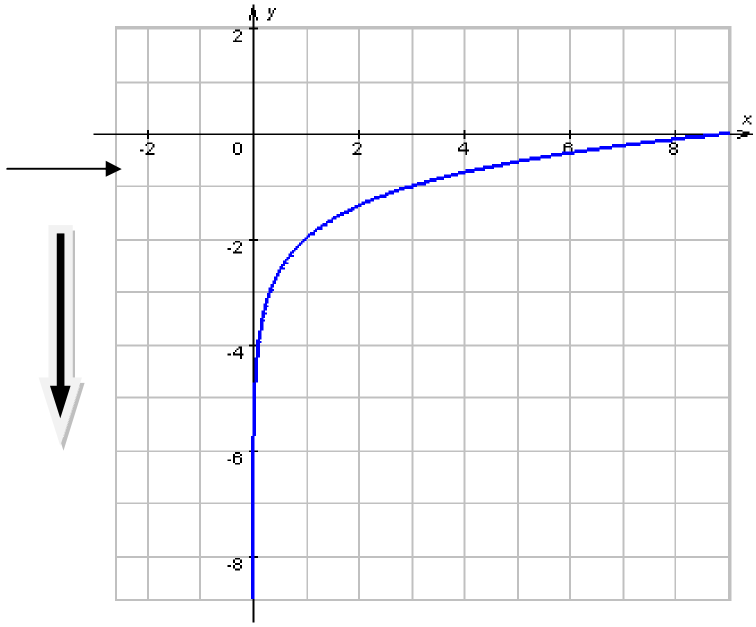
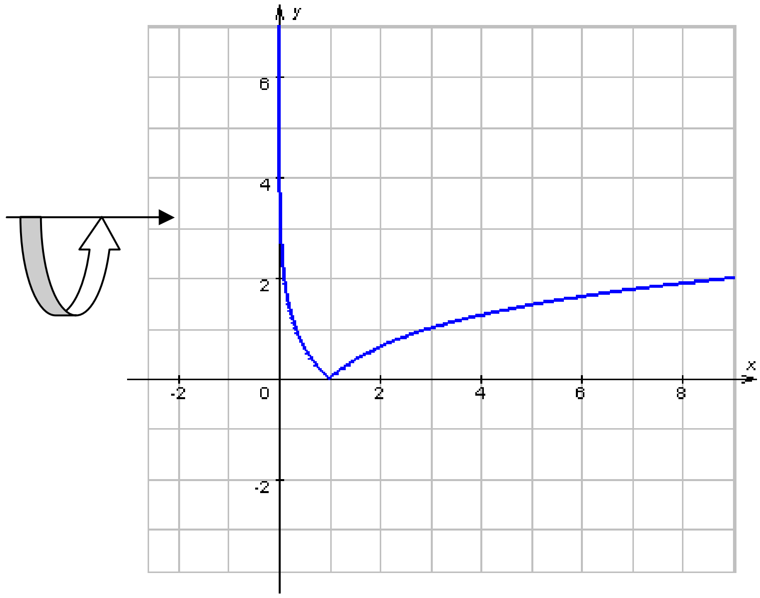
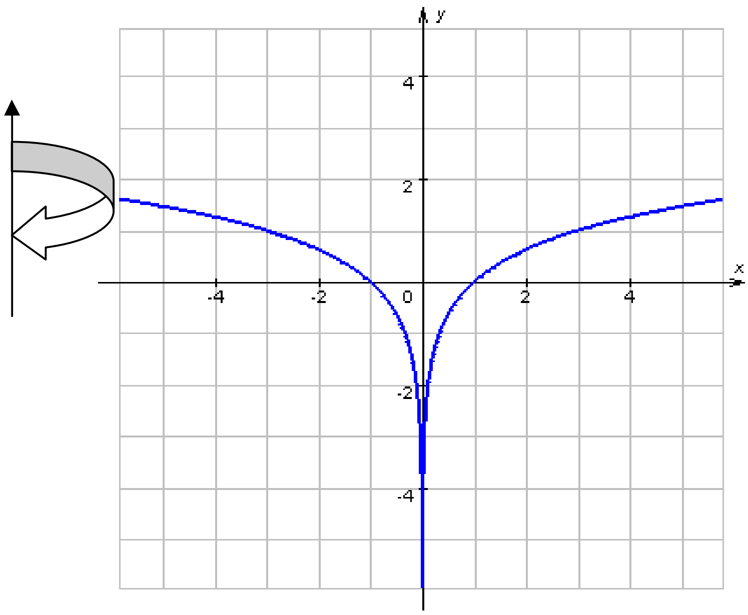
$$y = \log_3 x$$

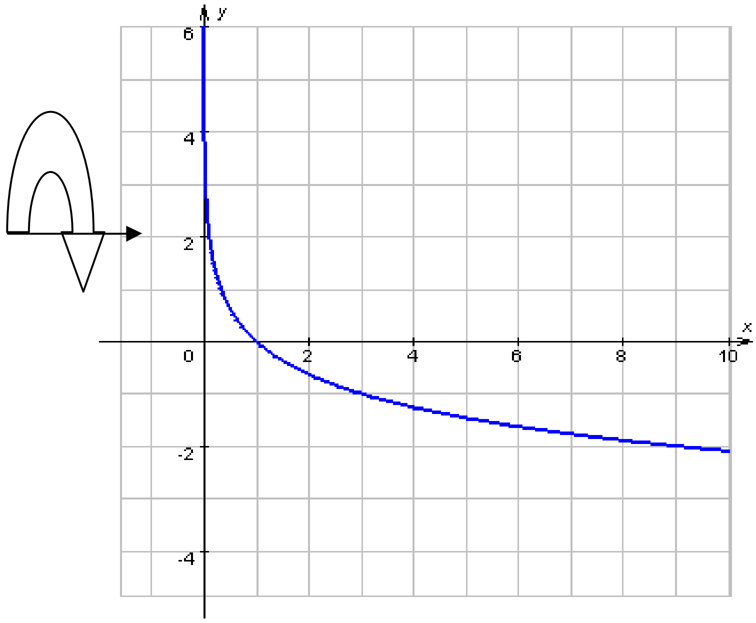
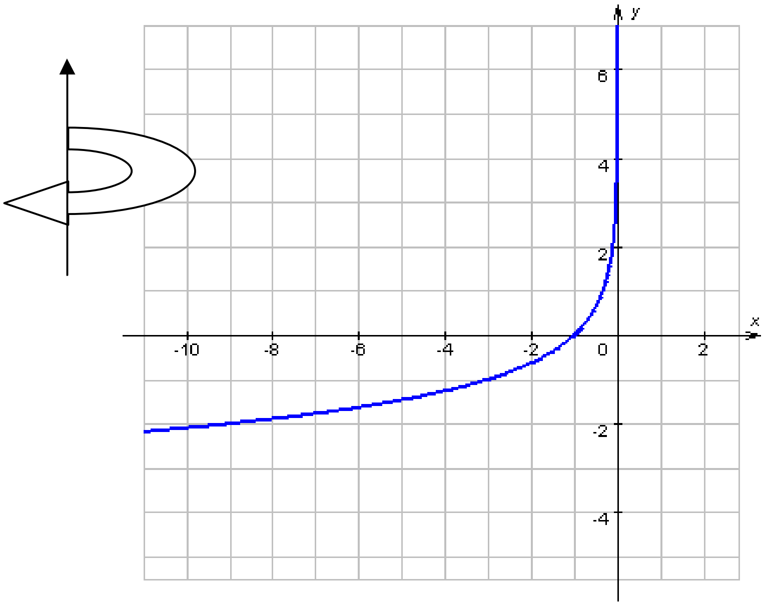
№	Формула, комментарий	Графическая иллюстрация
1	$y = \log_3 x$ **«Основной» график**	

2	$y = 2 \cdot \log_3 x$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОУ в 2 раза**	
3	$y = \frac{1}{2} \log_3 x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОУ в 2 раза**	
4	$y = \log_3 (2x)$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОХ в 2 раза**	

5	$y = \log_3 \dfrac{x}{2}$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОХ в 2 раза**	
6	$y = \log_3 (x - 2)$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ вправо на 2 единичных отрезка**	

7	$y = \log_3(x+1)$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ влево на** **1 единичный отрезок**	
8	$y = 1 + \log_3 x$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОУ вверх на** **1 единичный отрезок**	

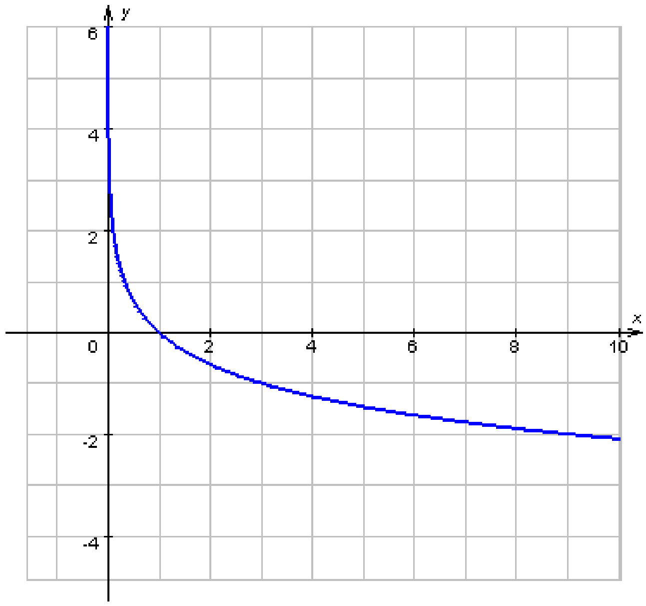
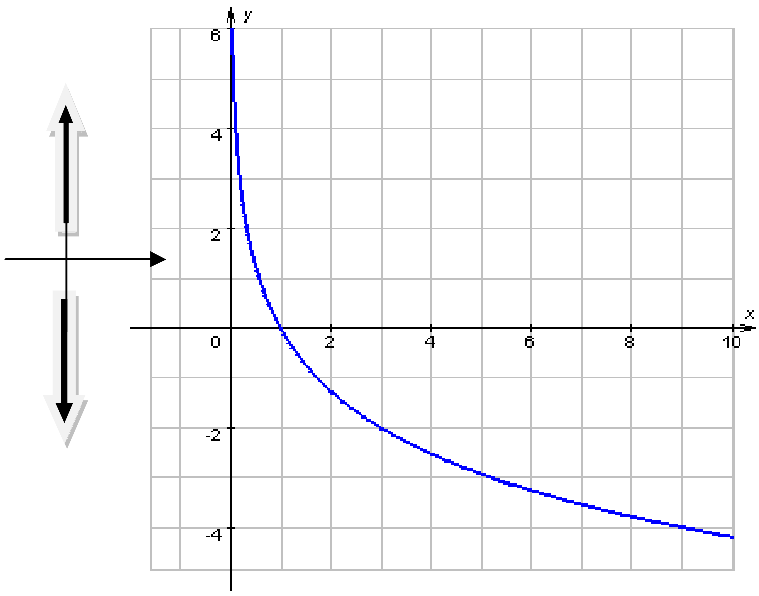
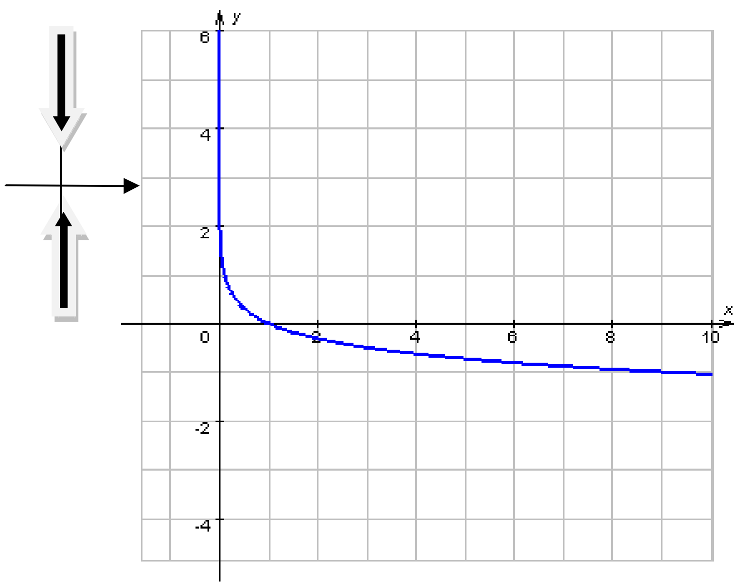
9	$y = -2 + \log_3 x$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОУ вниз на** 2 **единичных отрезка**	
10	$y = \left\|\log_3 x\right\|$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОХ**	
11	$y = \log_3 \left\|x\right\|$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОУ**	

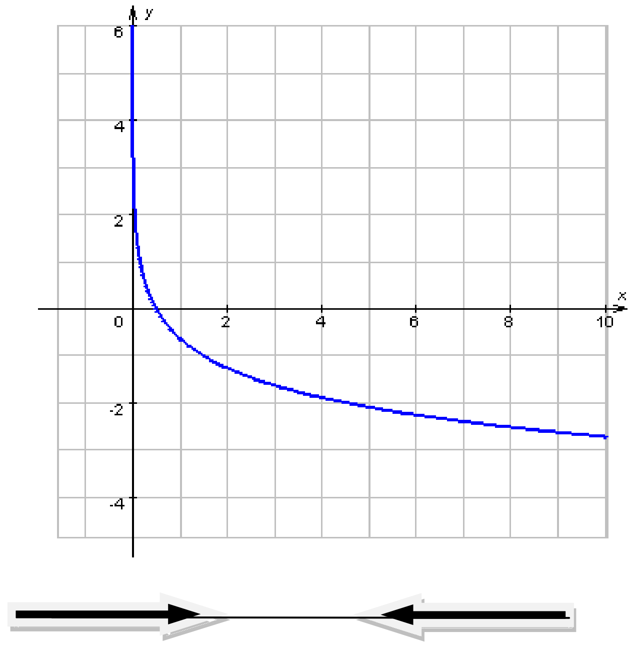
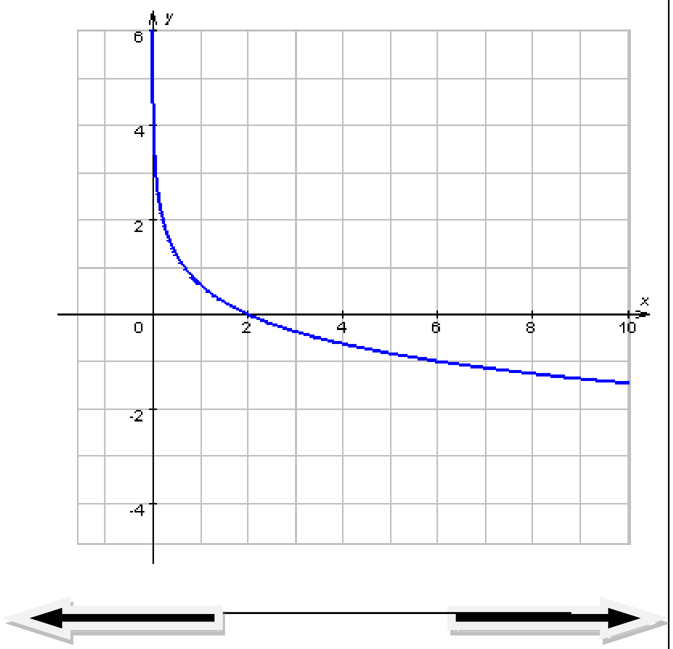
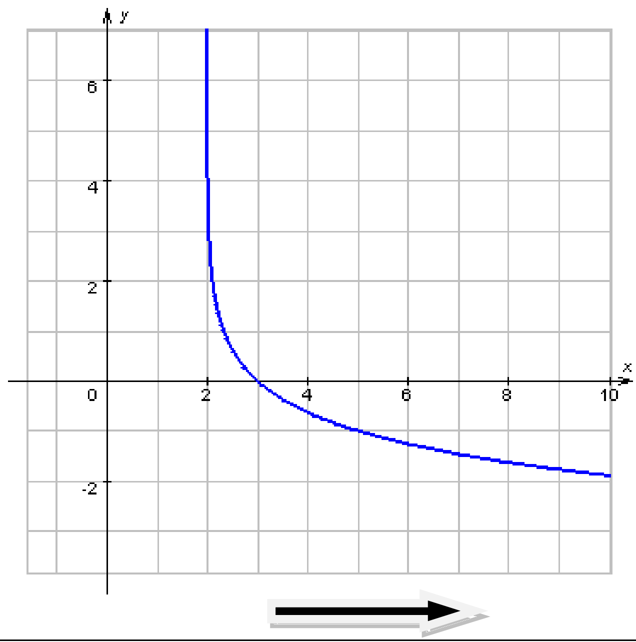
12	$y = -\log_3 x$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси ОХ**	
13	$y = \log_3(-x)$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси О**Y	

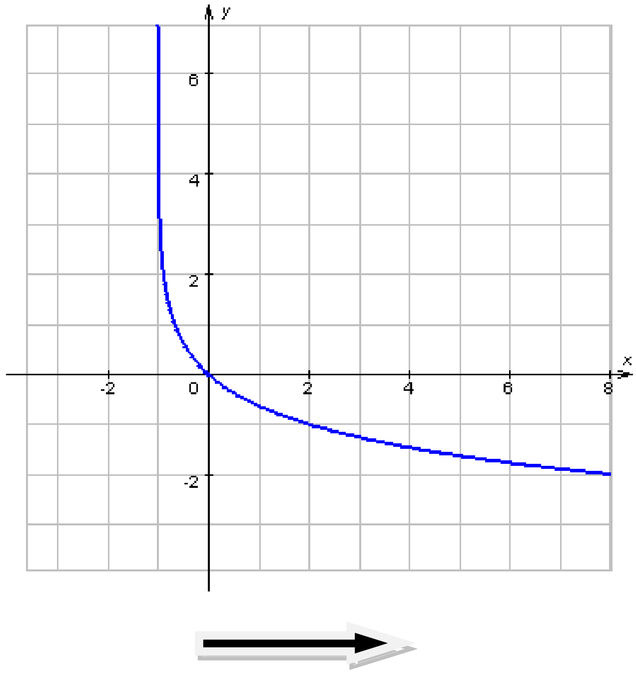
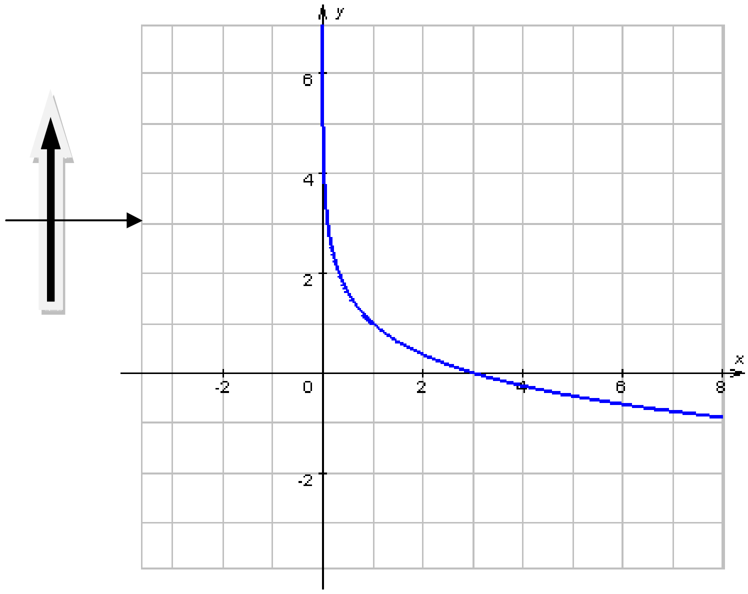
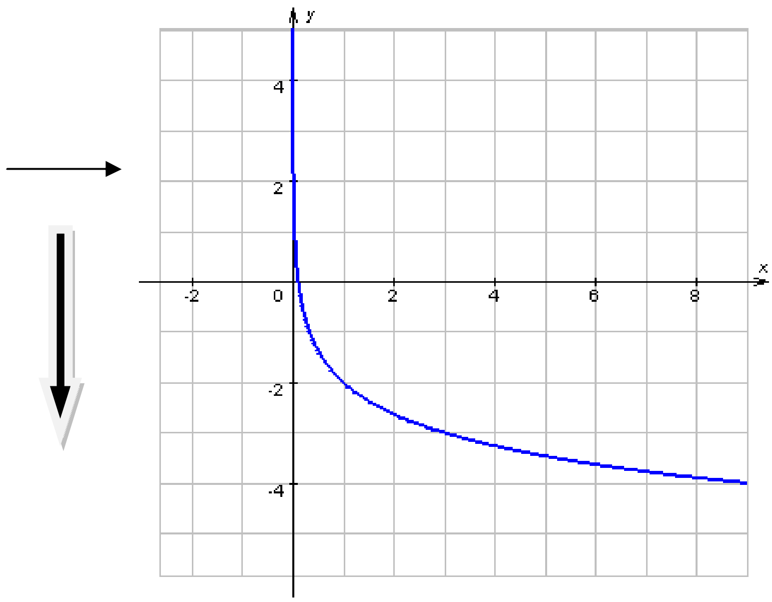
Преобразование графиков логарифмической (убывающей) функции

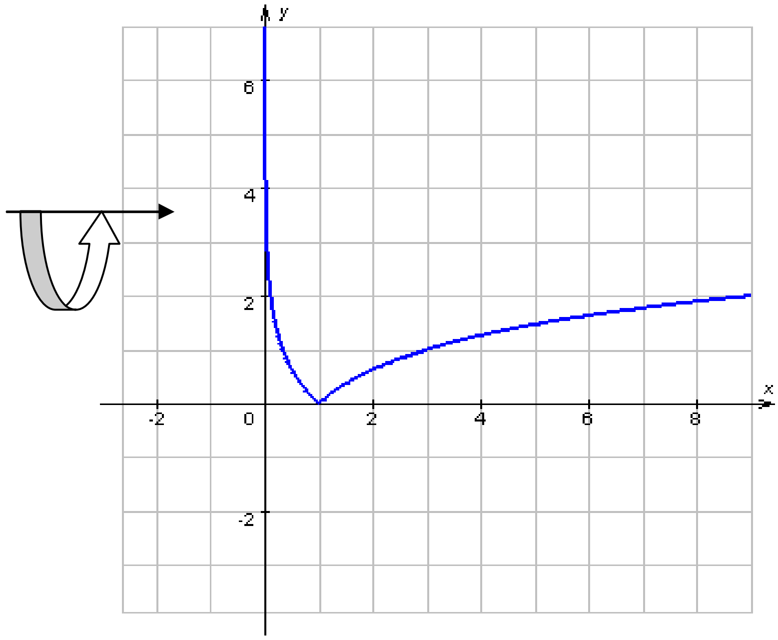
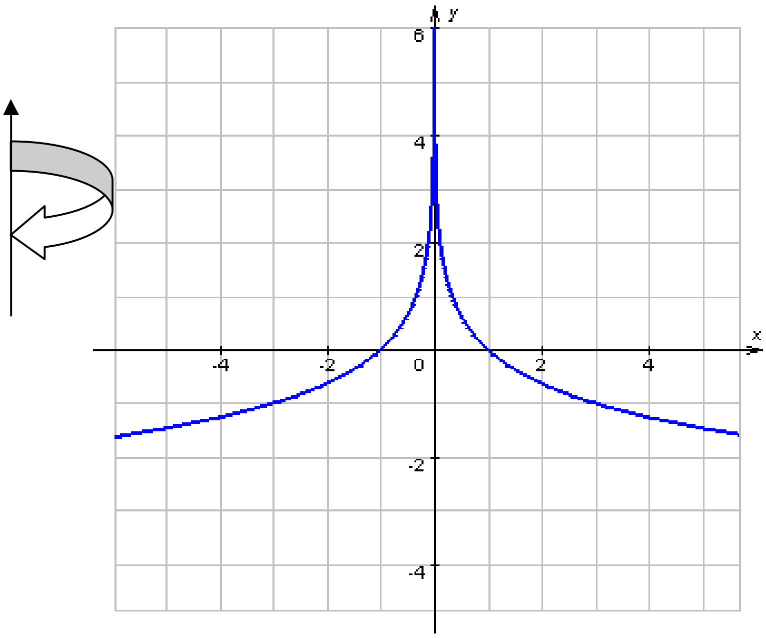
Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u>

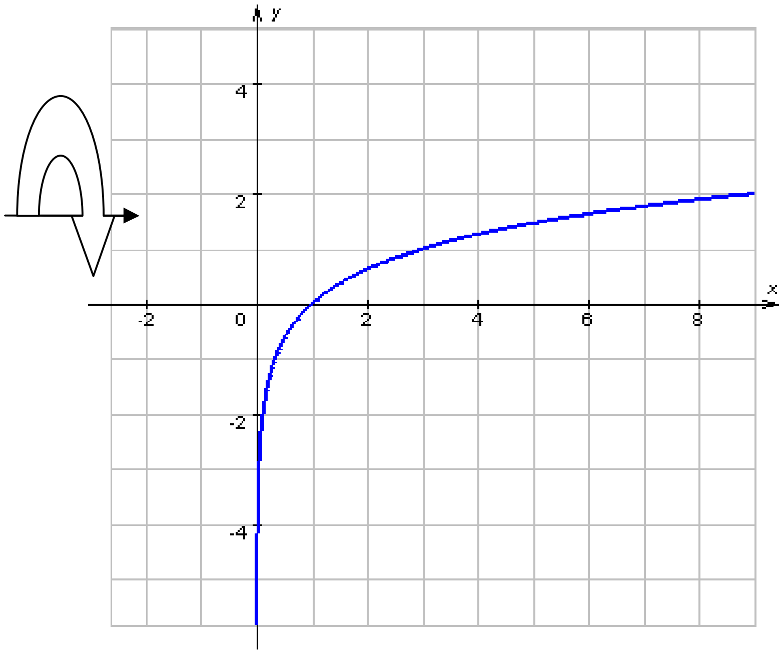
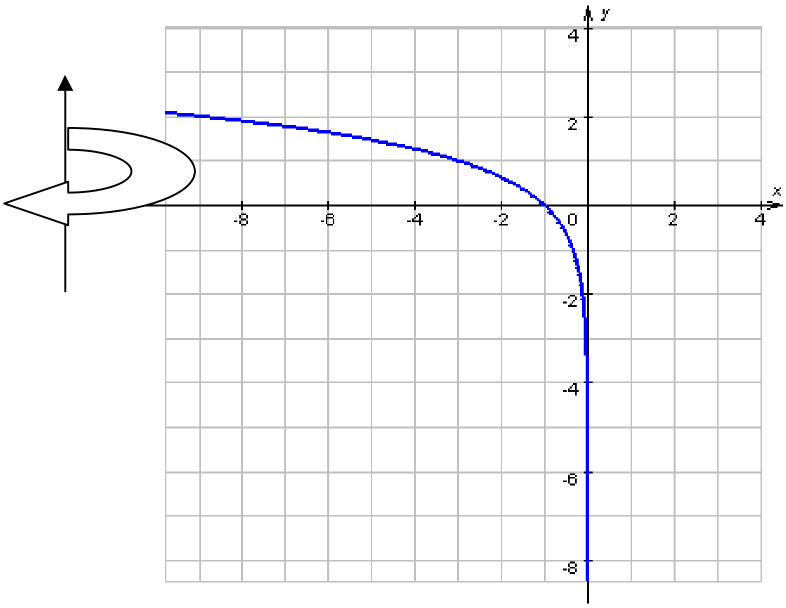
$$y = \log_{\frac{1}{3}} x$$

№	Формула, комментарий	Графическая иллюстрация
1	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ **«Основной» график**	
2	$y = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОУ в 2 раза**	
3	$y = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОУ в 2 раза**	

4	$$y = \log_{\frac{1}{3}}(2x)$$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОХ в 2 раза**	
5	$$y = \log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{2}$$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОХ в 2 раза**	
6	$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ вправо на** **2 единичных отрезка**	

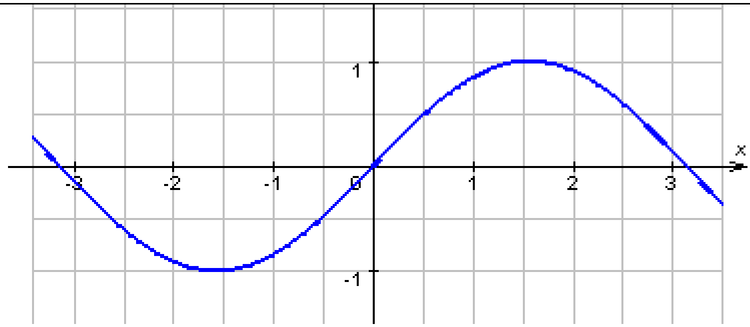
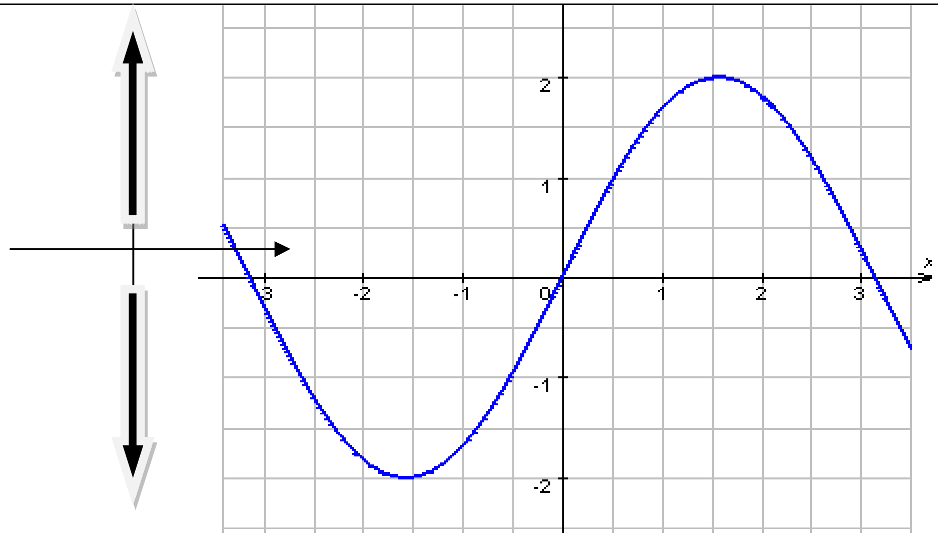
7	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ влево на** **1 единичный отрезок**	
8	$y = 1 + \log_{\frac{1}{3}} x$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОУ вверх на** **1 единичный отрезок**	
9	$y = -2 + \log_{\frac{1}{3}} x$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОУ вниз на** **2 единичных отрезка**	

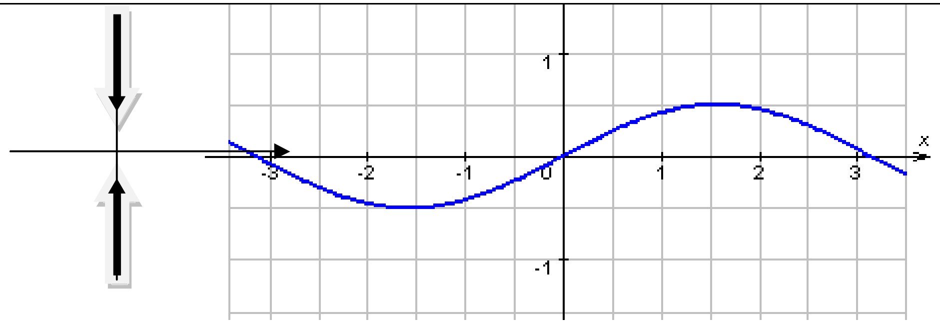
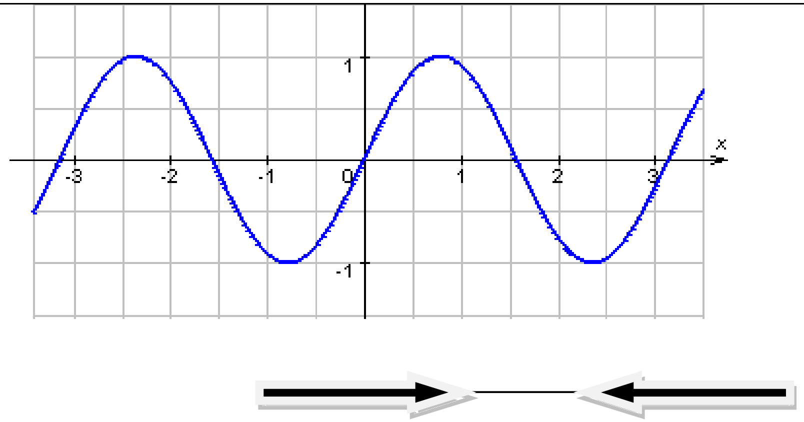
10	$$y = \left\| \log_{\frac{1}{3}} x \right\|$$ <u>**Отражение**</u> **относительно оси ОХ**	
11	$$y = \log_{\frac{1}{3}} \|x\|$$ <u>**Отражение**</u> **относительно оси ОУ**	

12	$y = -\log_{\frac{1}{3}} x$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси ОХ**	
13	$y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси О**Y	

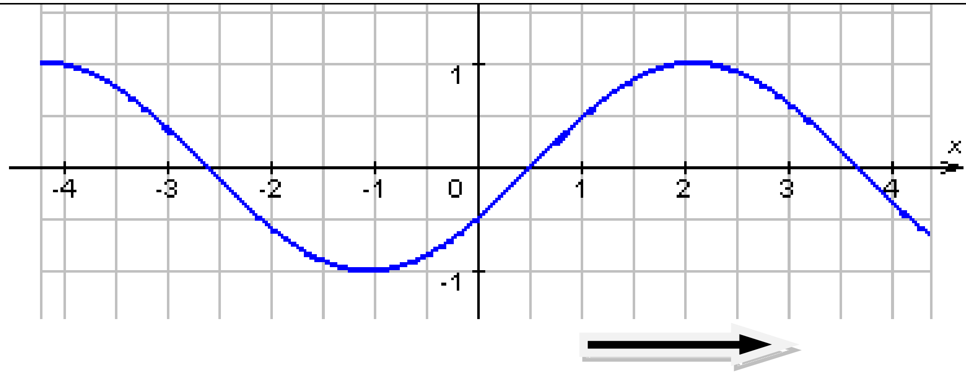
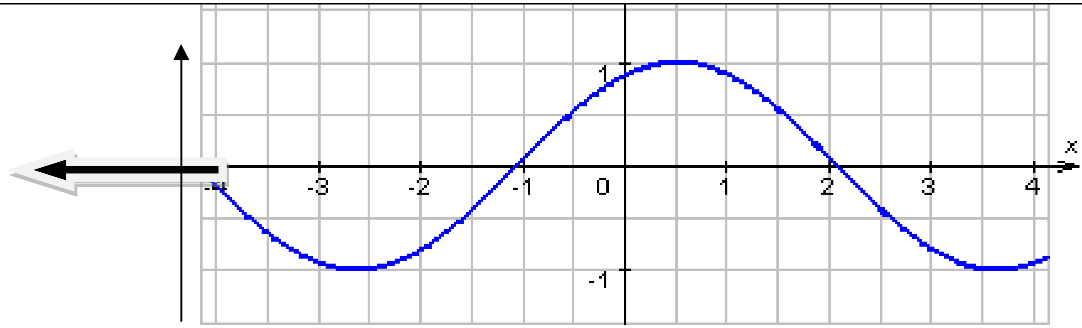
Преобразование тригонометрических графиков функций. Синусоида

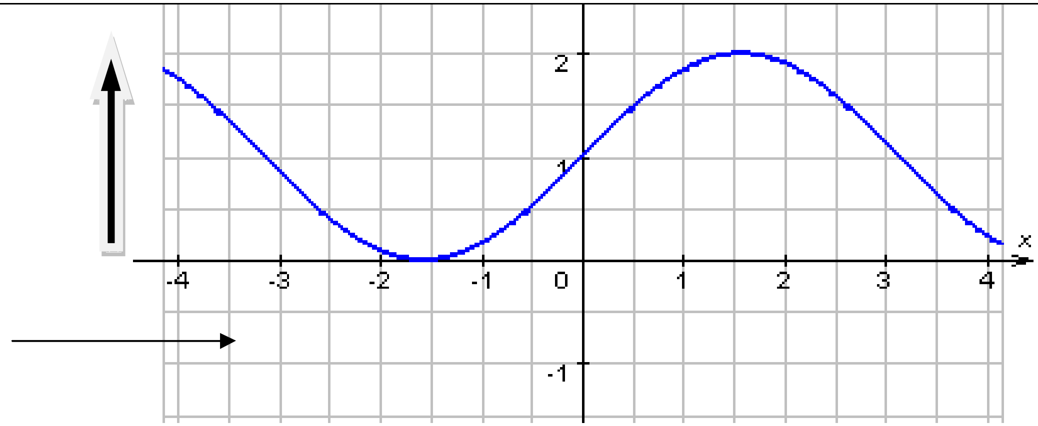
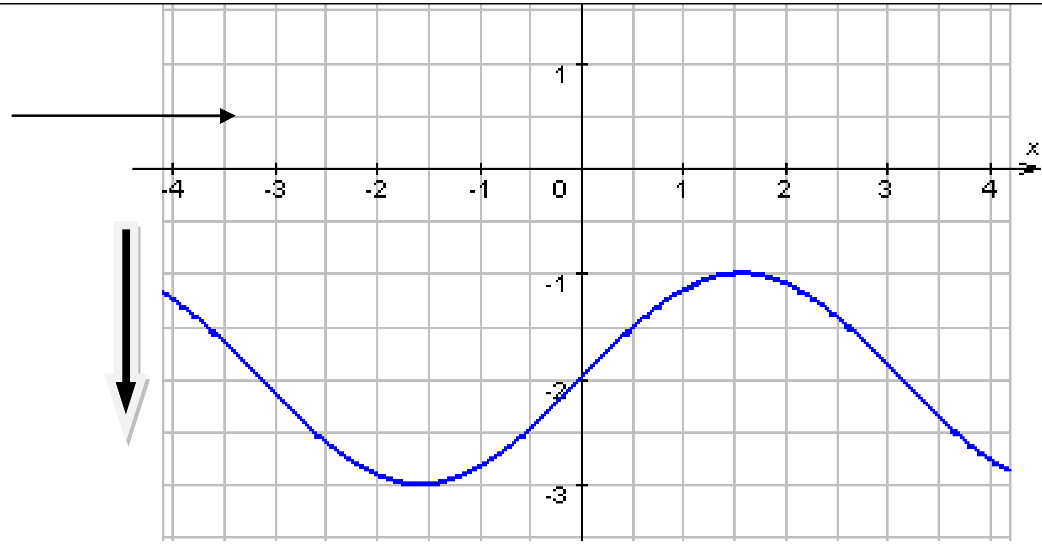
Все графики функций построены относительно «основного» графика $y = \sin x$.

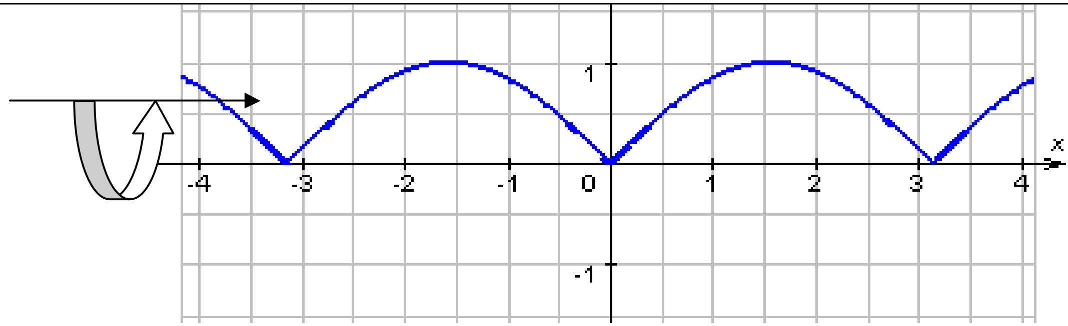
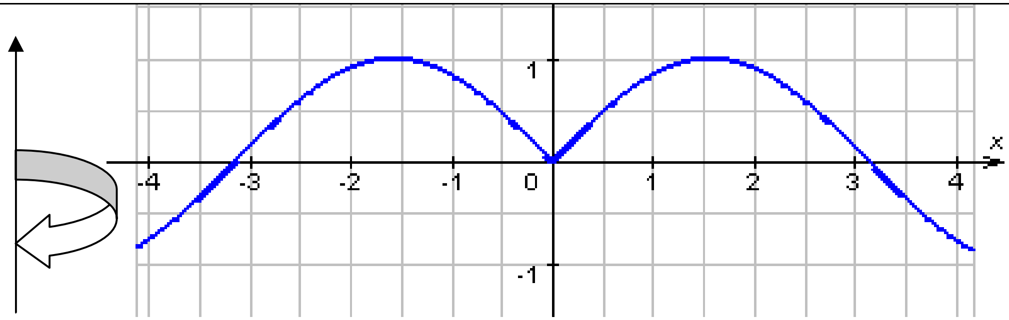
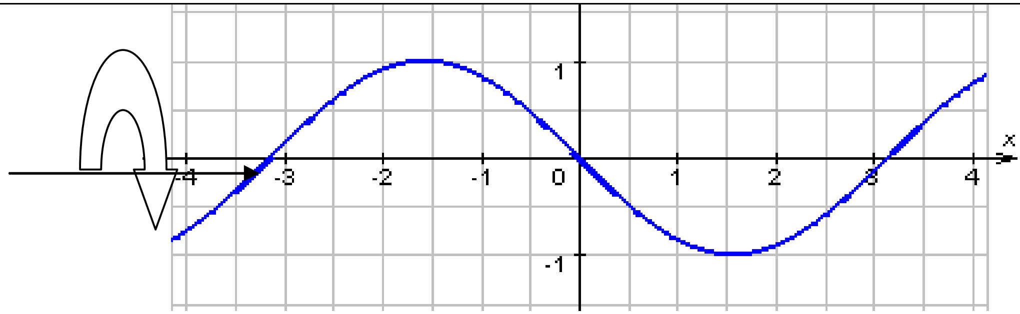
№	**Формула, комментарий**	**Графическая иллюстрация**
1	$y = \sin x$ **«Основной» график**	
2	$y = 2\sin x$ **Растяжение** **вдоль оси ОУ** **в 2 раза**	

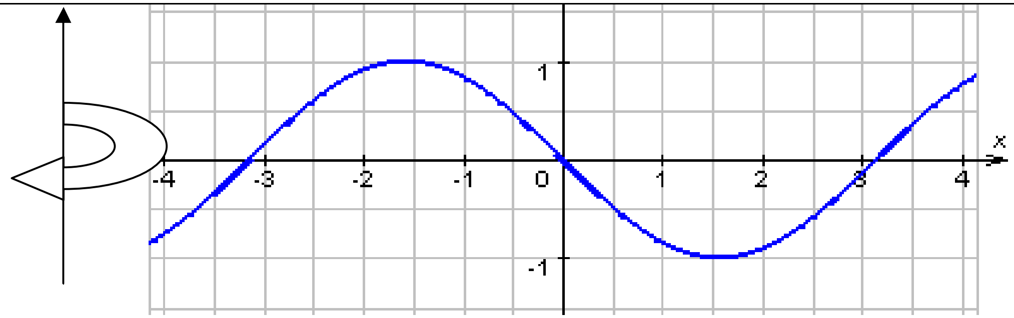
3	$y = \frac{1}{2}\sin x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОУ** **в 2 раза**	
4	$y = \sin 2x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОХ** **в 2 раза**	

5	$y = \sin\frac{x}{2}$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОХ** **в 2 раза**	

6	$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ **<u>Параллельный перенос</u>** **<u>(сдвиг)</u> вдоль оси ОХ вправо** **на** $\frac{\pi}{6}$ **(на 1 клетку)**	
7	$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **<u>Параллельный перенос</u>** **<u>(сдвиг)</u> вдоль оси ОХ влево** **на** $\frac{\pi}{3}$ **(на 2 клетку)**	

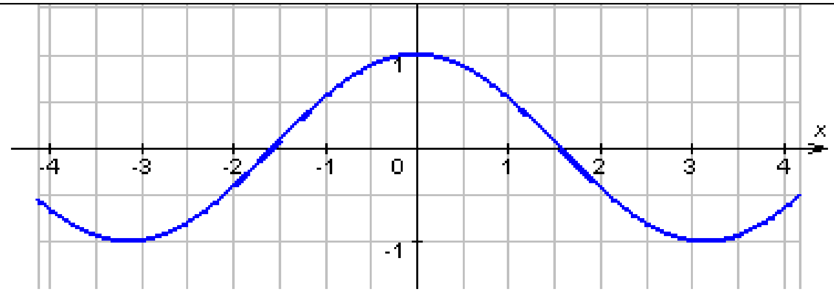
8	$y = \sin x + 1$ <u>**Параллельный перенос (сдвиг)**</u> **вдоль оси ОУ вверх на** 1 **единичный отрезок** (2 **клетки**)	
9	$y = \sin x - 2$ <u>**Параллельный перенос (сдвиг)**</u> **вдоль оси ОУ вниз на** 2 **единичных отрезка** (4 **клетки**)	

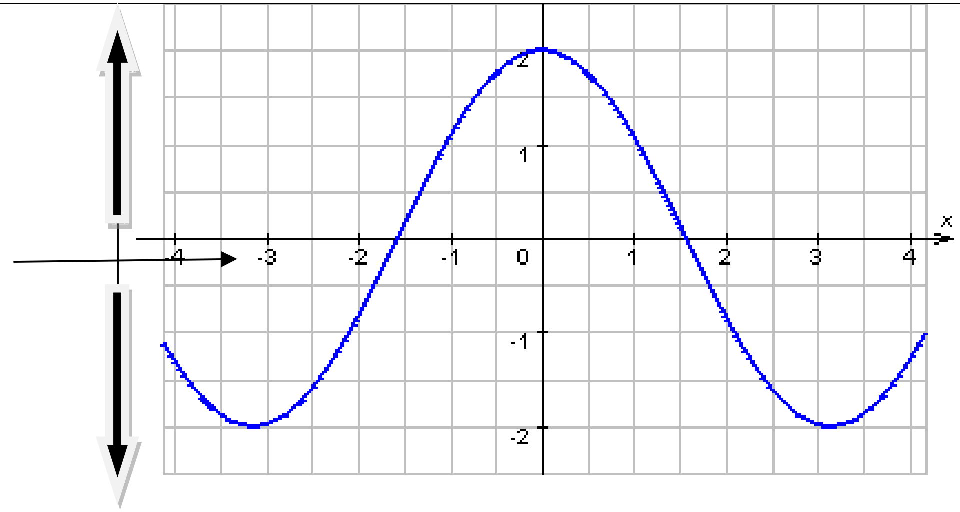
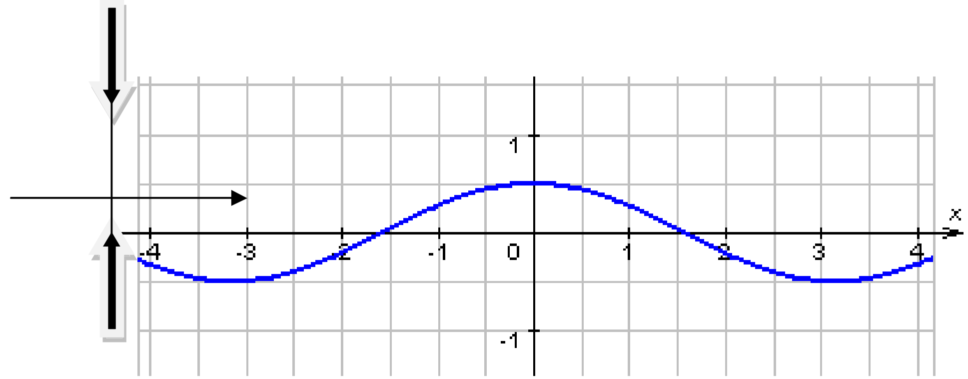
10	$y = \lvert \sin x \rvert$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОХ**	
11	$y = \sin \lvert x \rvert$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОУ**	
12	$y = -\sin x$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси ОХ**	

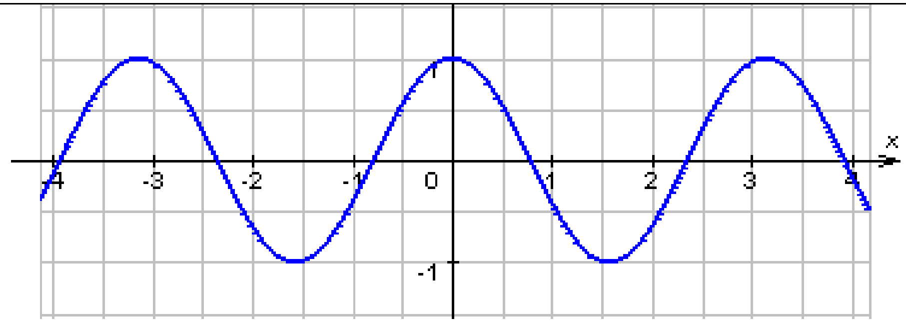
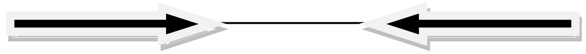
13	$y = \sin(-x)$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси ОY**	

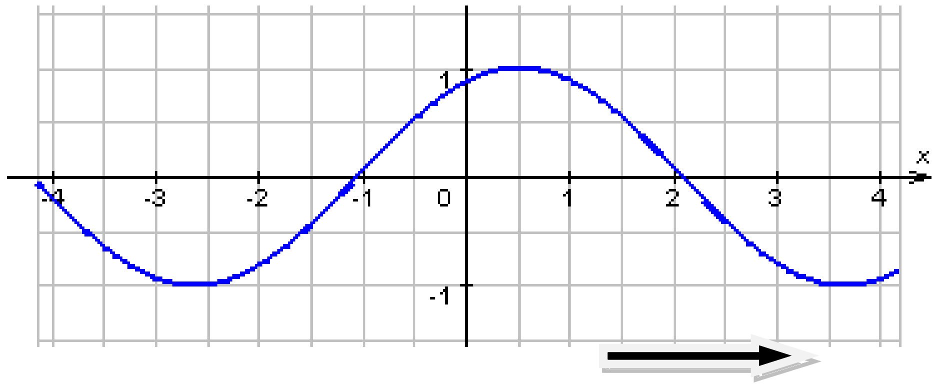
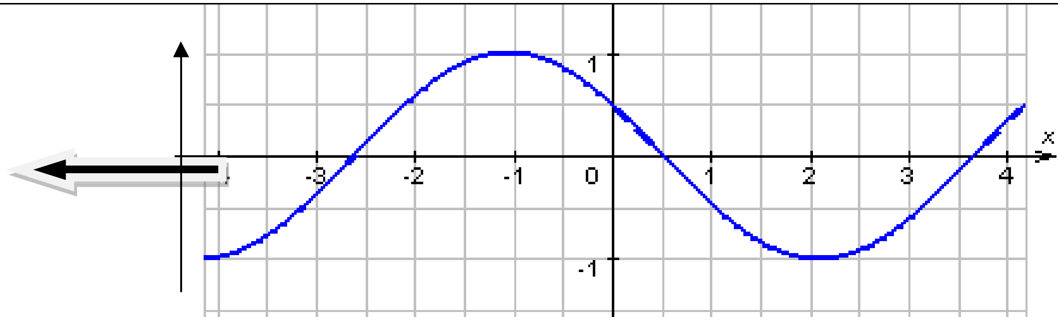
Преобразование тригонометрических графиков функций. (Косинусоида)

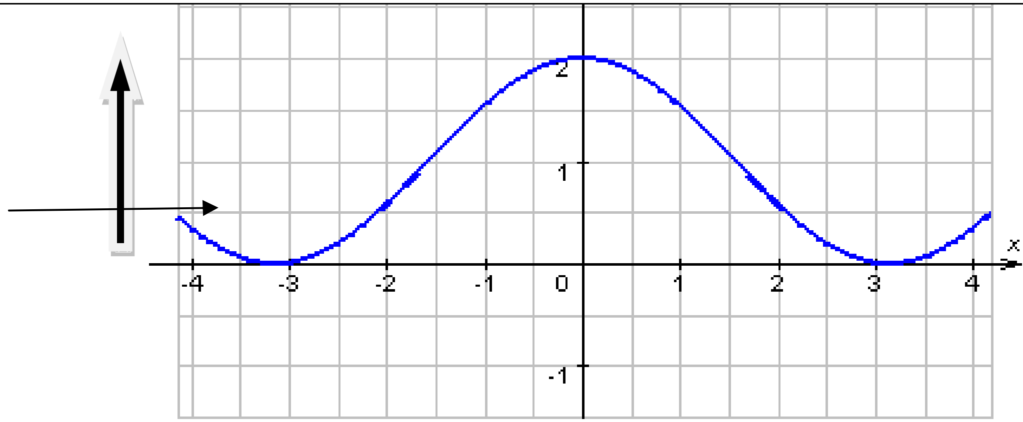
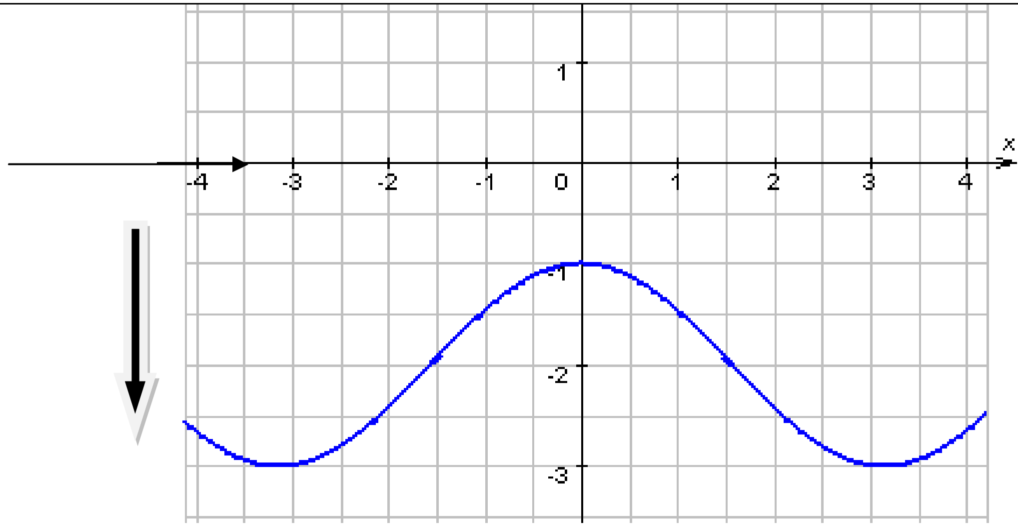
Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u> $y = \cos x$.

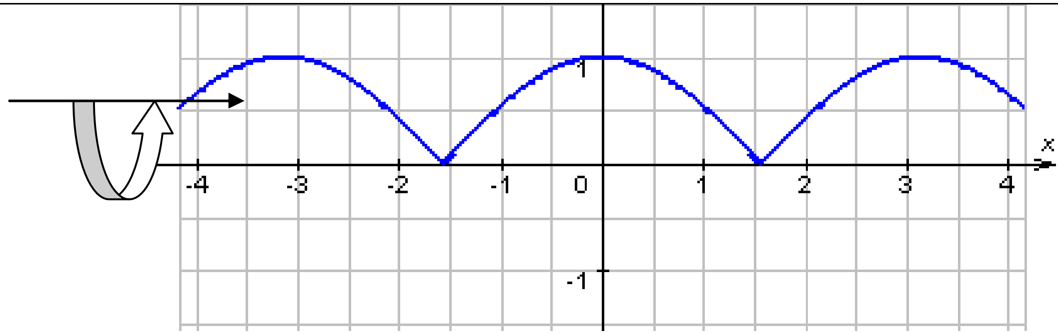
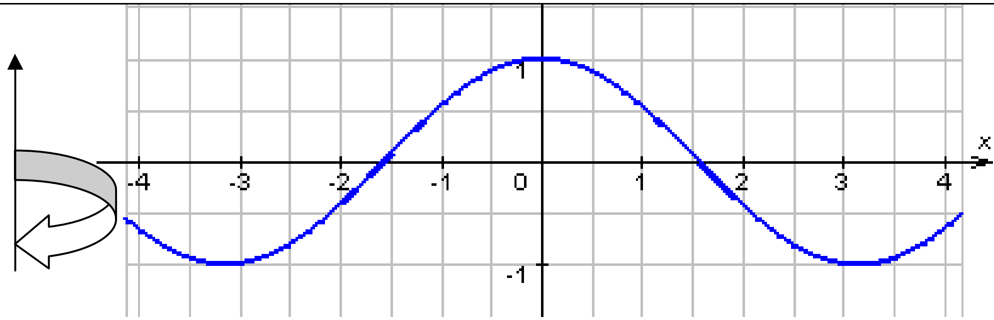
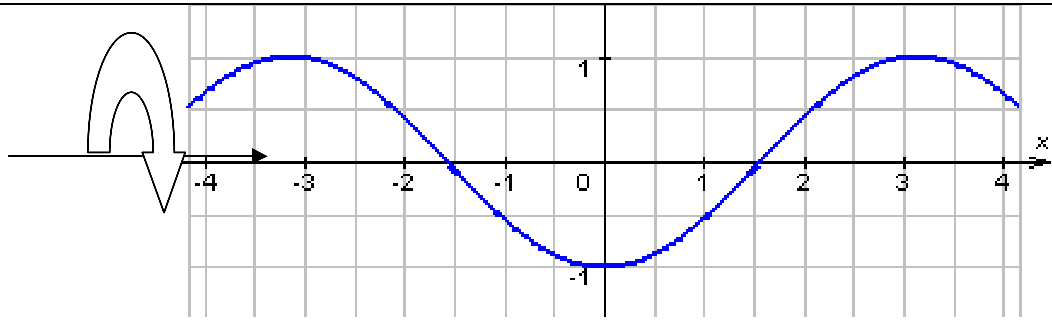
№	Формула, комментарий	Графическая иллюстрация
1	$y = \cos x$ **«Основной» график**	

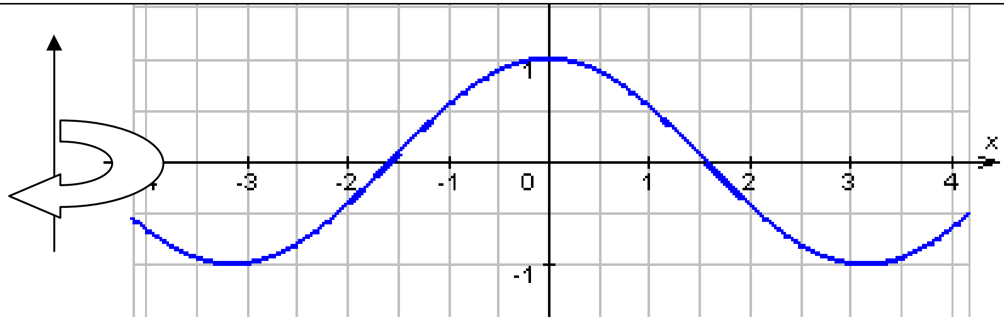
2	$y = 2\cos x$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОУ в 2 раза**	
3	$y = \dfrac{1}{2}\cos x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОУ в 2 раза**	
4	$y = \cos 2x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОХ в 2 раза**	

		
5	$$y = \cos\frac{x}{2}$$ <u>**Растяжение**</u> **вдоль оси ОХ в** 2 **раза**	

		
6	$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ вправо на** $\frac{\pi}{6}$ **(на** 1 **клетку)**	
7	$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ влево на** $\frac{\pi}{3}$ **(на** 2 **клетку)**	

8	$y = \cos x + 1$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОУ вверх на** 1 **единичный отрезок** (2 **клетки**)	
9	$y = \cos x - 2$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОУ вниз на** 2 **единичных отрезка** (4 **клетки**)	

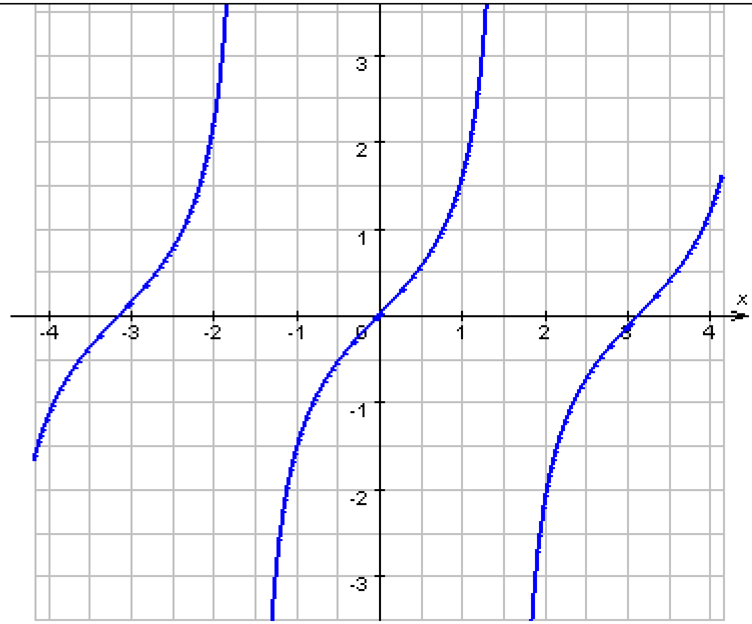
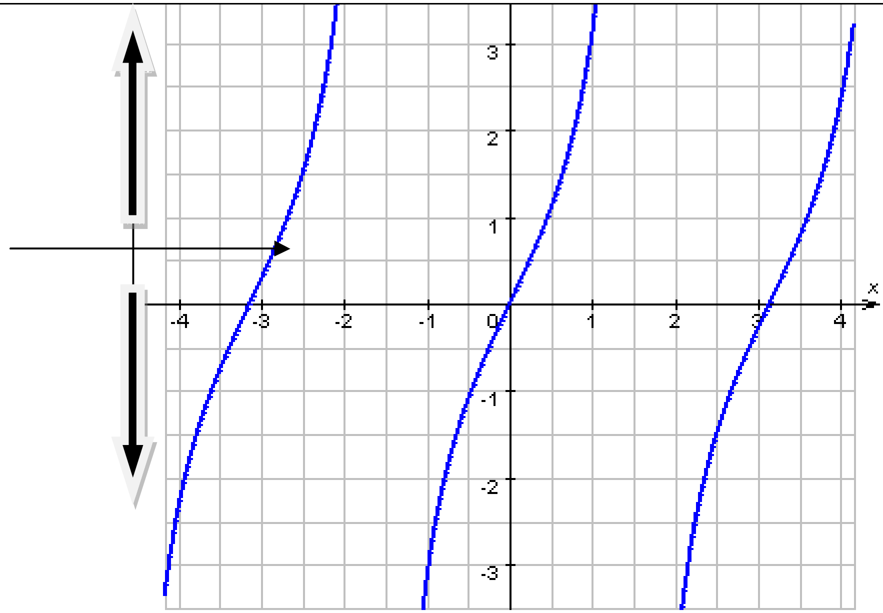
10	$y = \lvert\cos x\rvert$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОХ**	
11	$y = \cos\lvert x\rvert$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОУ**	
12	$y = -\cos x$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси ОХ**	

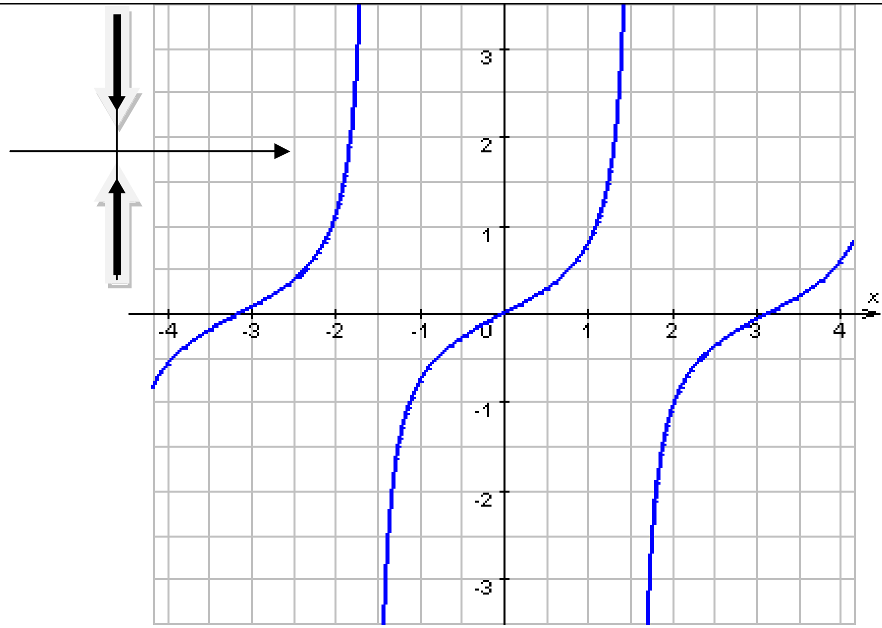
13	$y = \cos(-x)$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси О**Y	

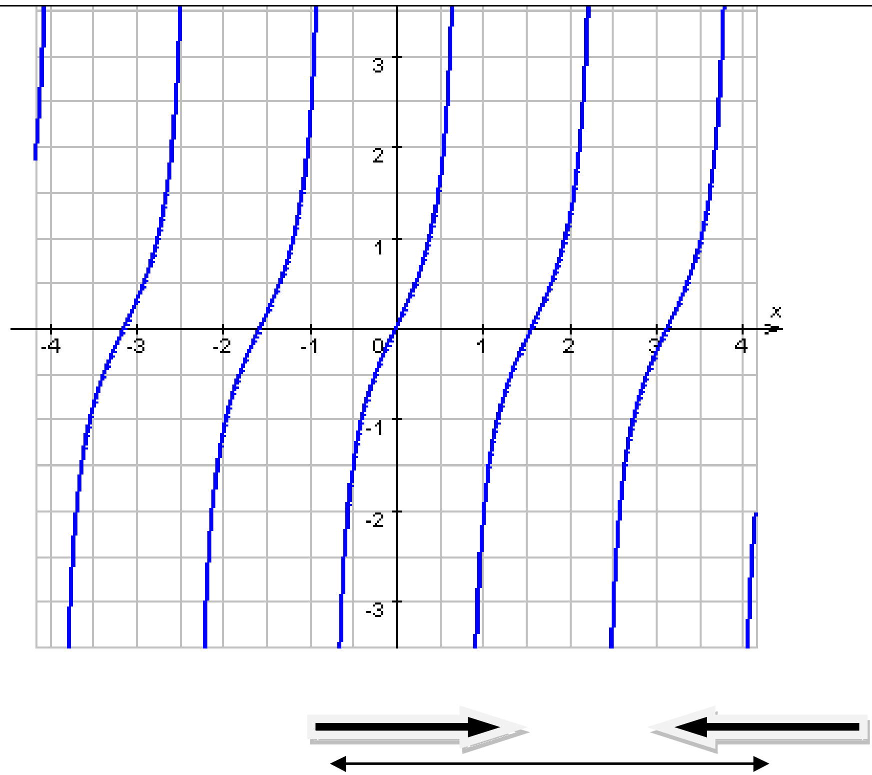
Преобразование тригонометрических графиков функций. Тангенсоида

Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u> $y = tgx$ **.**

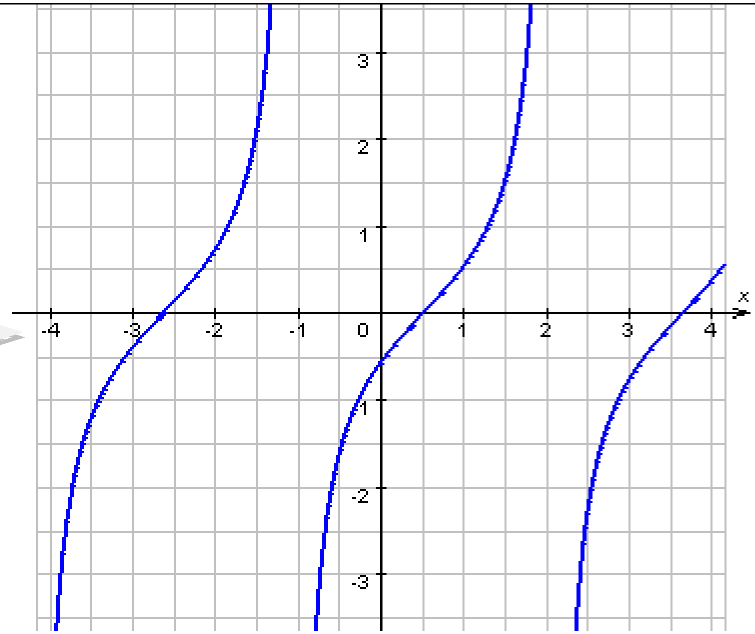
№	**Формула, комментарий**	**Графическая иллюстрация**

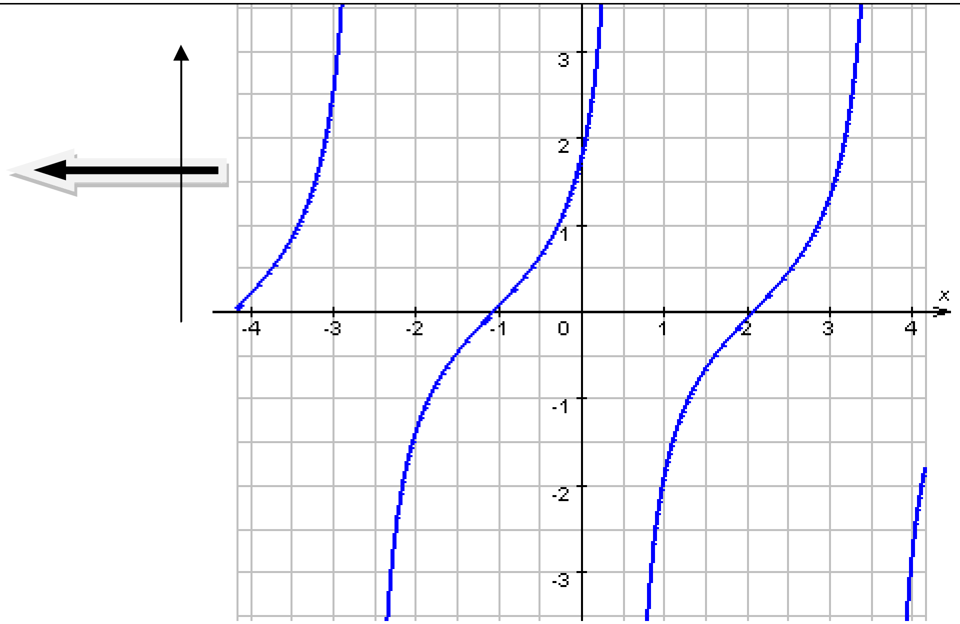
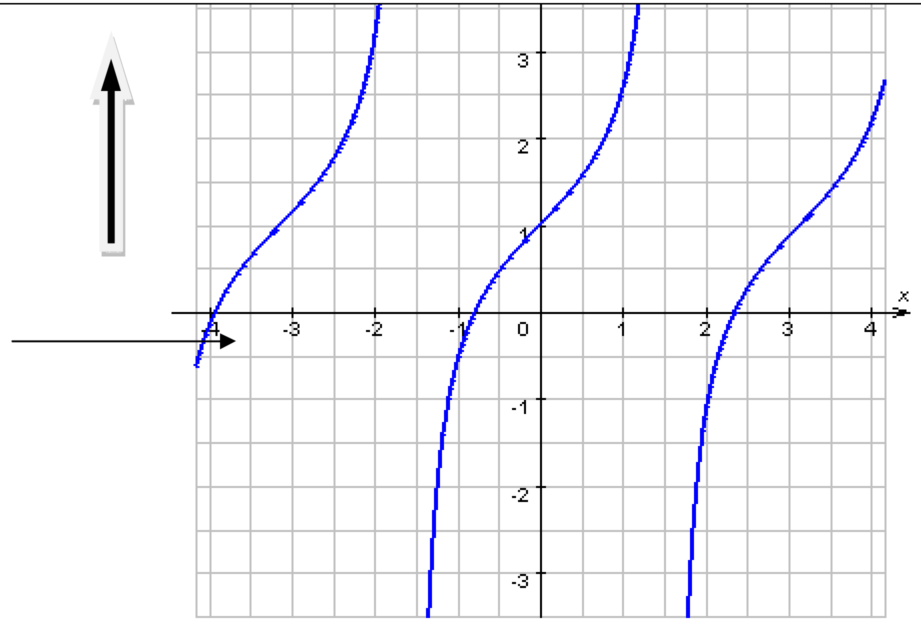
<table>
<tr><td>1</td><td>$$y = tg\,x$$
«Основной» график</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$$y = 2tg\,x$$
<u>Растяжение</u>
вдоль оси ОУ
в 2 раза</td><td>
</td></tr>
</table>

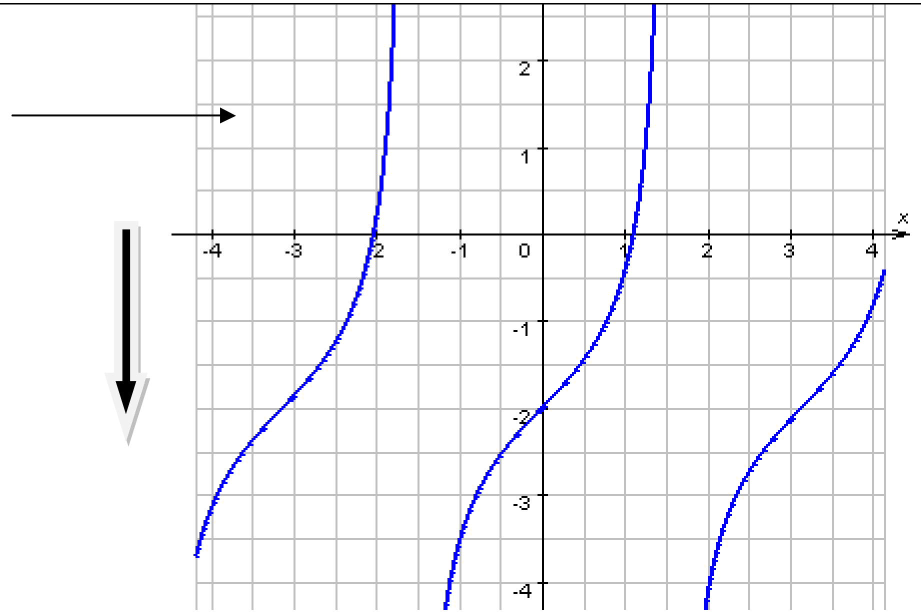
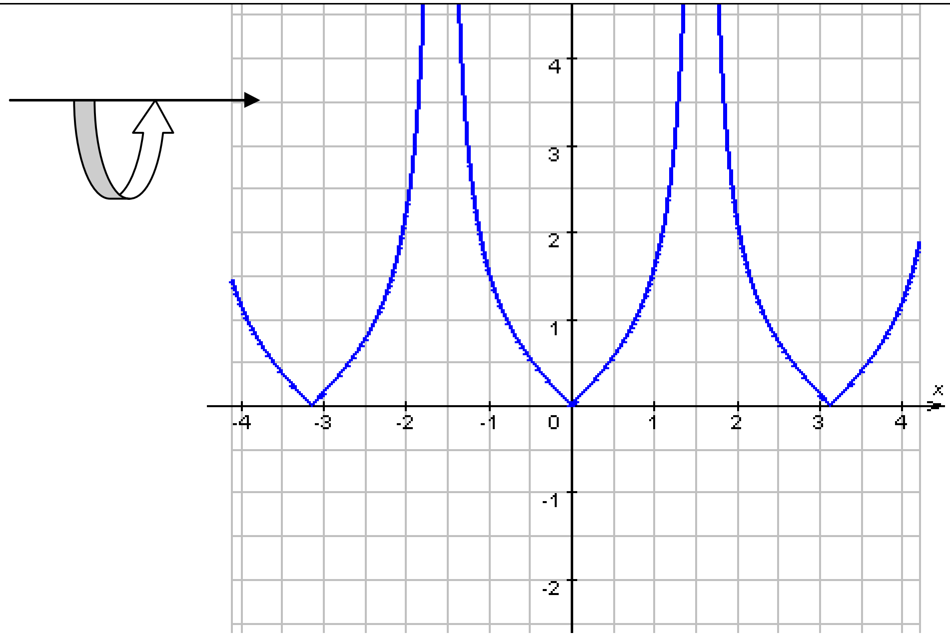
3	$$y = \frac{1}{2} tg\, x$$ <u>**Сжатие**</u> **вдоль оси ОУ** **в** 2 **раза**	

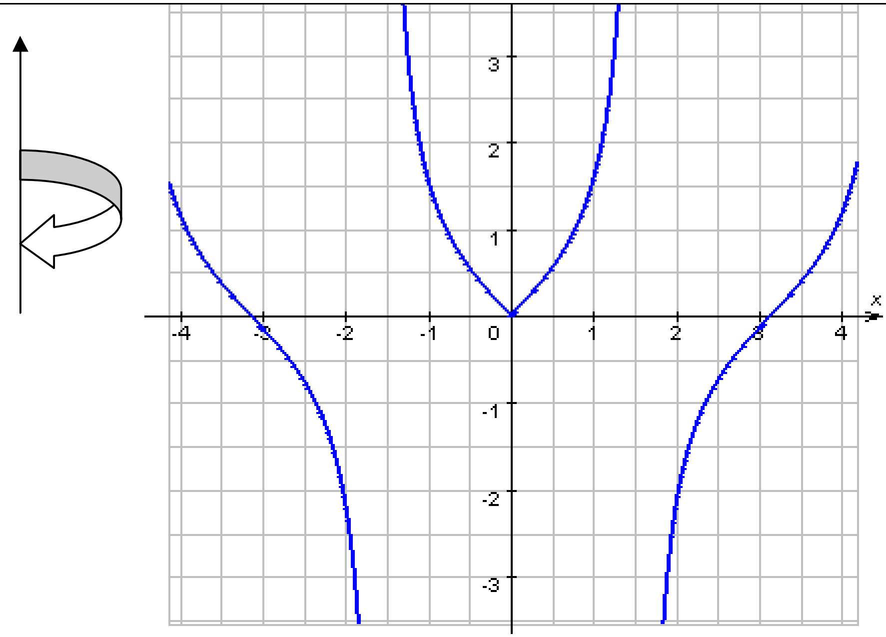
4	$y = tg\, 2x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОХ** **в 2 раза**	
5	$y = tg\, \dfrac{x}{2}$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОХ**	

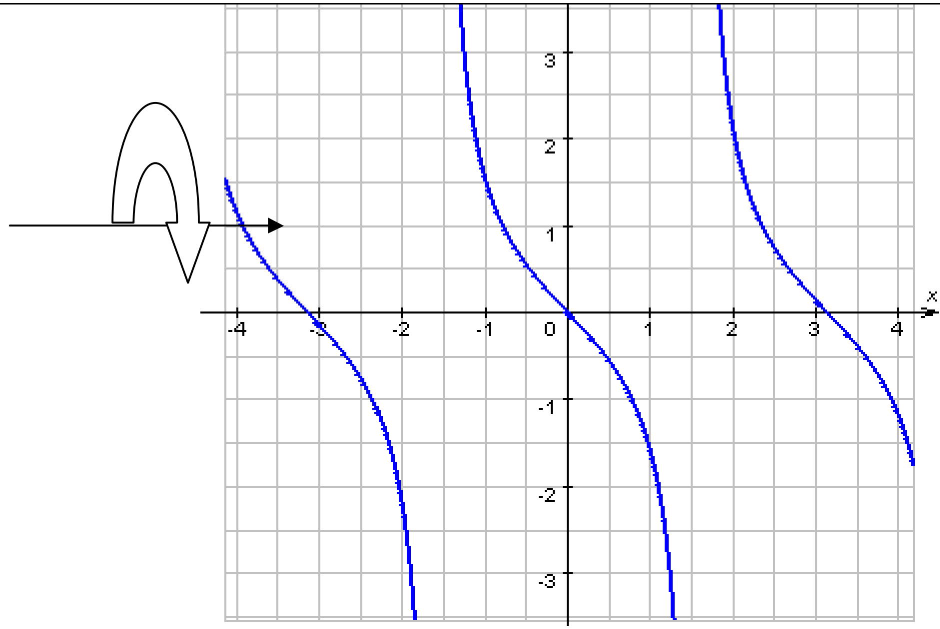
	в 2 **раза**	

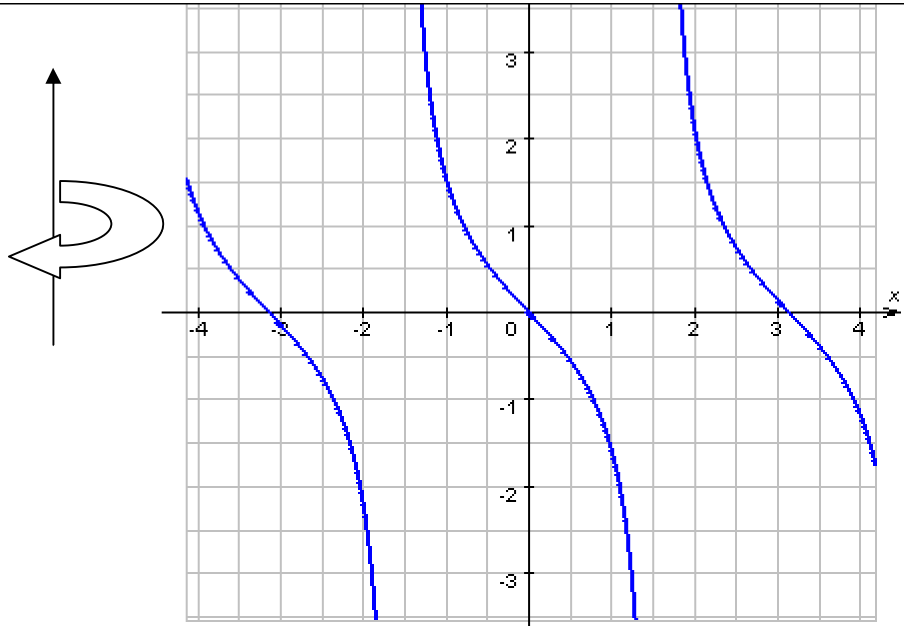
6	$y = tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОХ вправо на** $\frac{\pi}{6}$ (**1 клетку**)	

7	$y = tg\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ **<u>Параллельный перенос</u>** **<u>(сдвиг)</u> вдоль оси ОХ влево** **на** $\dfrac{\pi}{3}$ (2 **клетки)**	
8	$y = tg\,x + 1$ **<u>Параллельный перенос</u>** **<u>(сдвиг)</u> вдоль оси ОУ вверх на** 1 **единичный отрезок** (2 **клетки)**	

9	$y = tg\,x - 2$ **<u>Параллельный перенос</u>** **<u>(сдвиг)</u> вдоль оси ОУ вниз на** 2 **единичных отрезка** (4 **клетки**)	
10	$y = \left\lvert tg\,x \right\rvert$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОХ**	

11	$y = tg\,\left\|x\right\|$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОУ**	

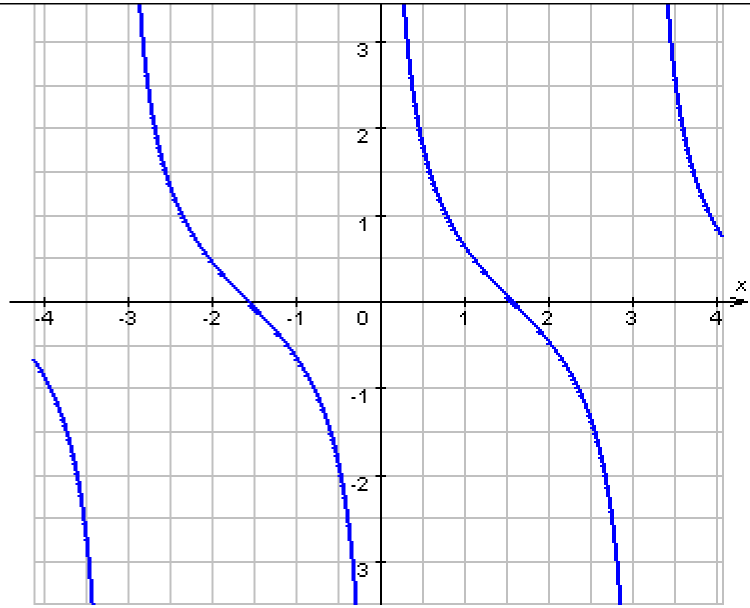
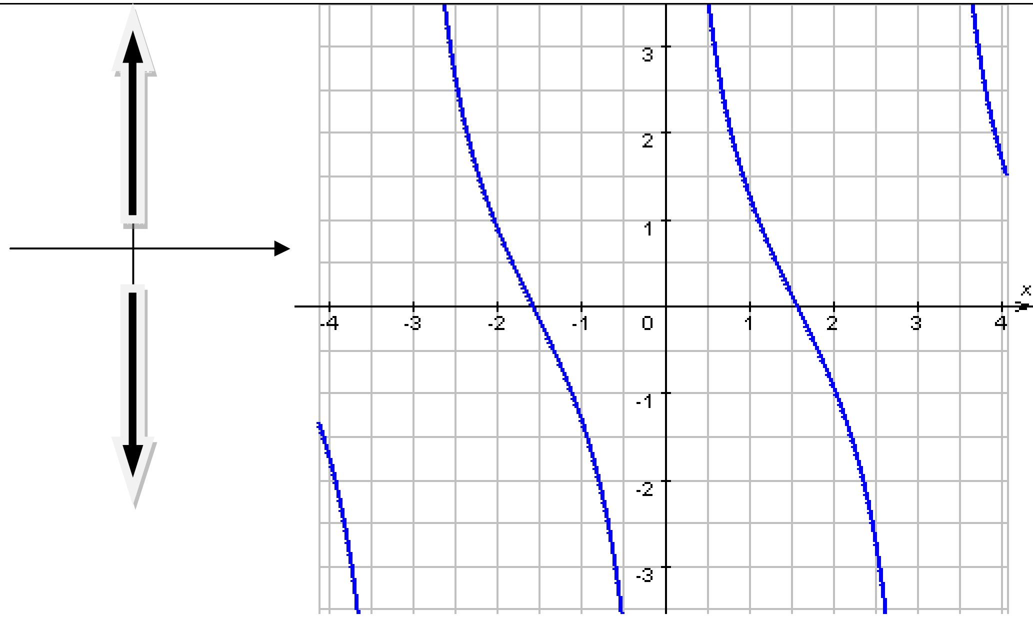
12	$y = -tg\,x$ **<u>Поворот</u>** **на** 180^0 **вокруг оси ОХ**	

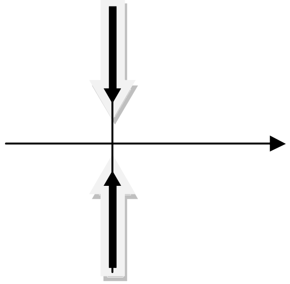
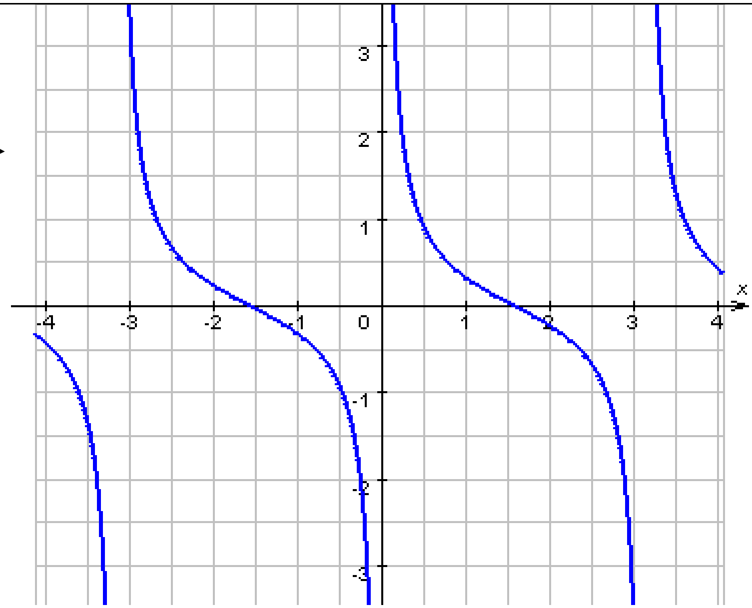
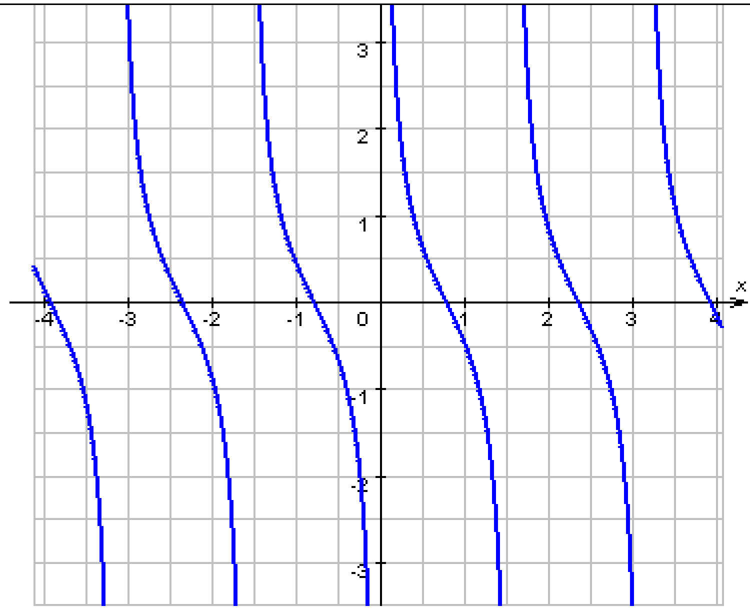
13	$y = tg\,(-x)$ **<u>Поворот</u> на** 180^0 **вокруг оси O**Y	

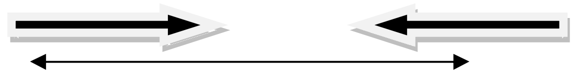
Преобразование тригонометрических графиков функций. <u>Котангенсоида».</u>

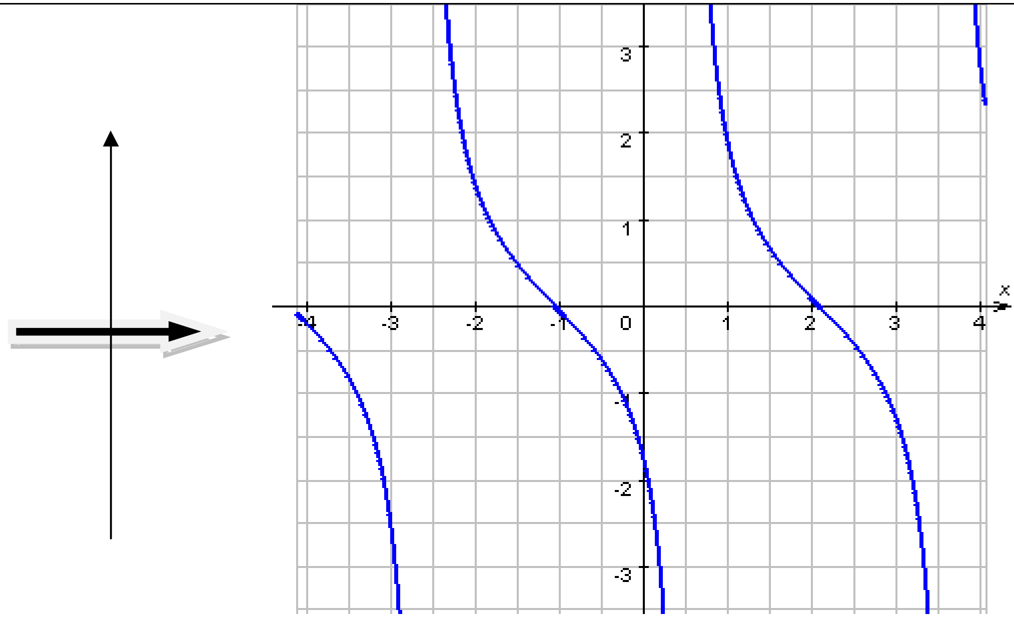
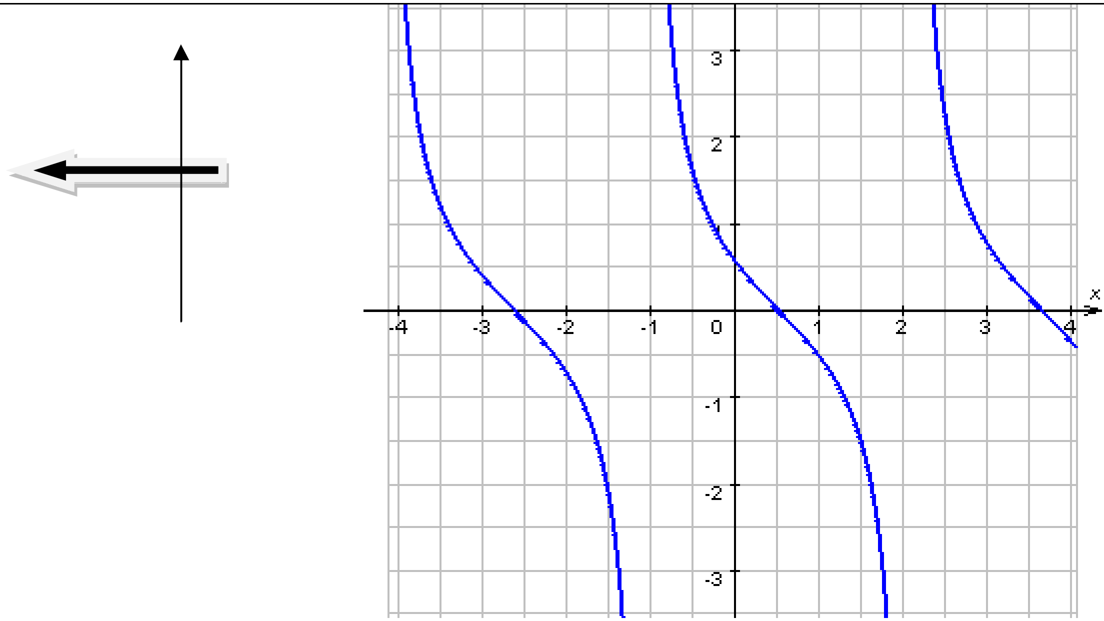
Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u> $y = \tilde{n}tg\,x$ **.**

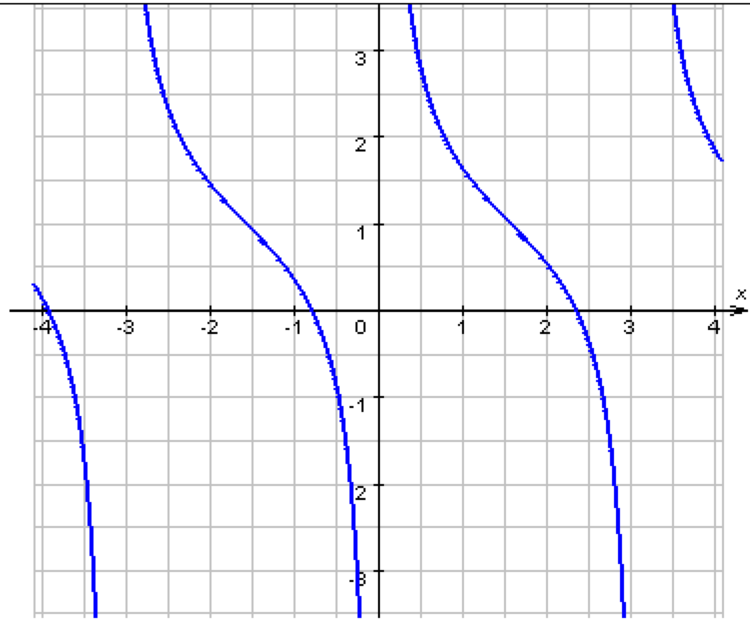
№	Формула, комментарий	Графическая иллюстрация

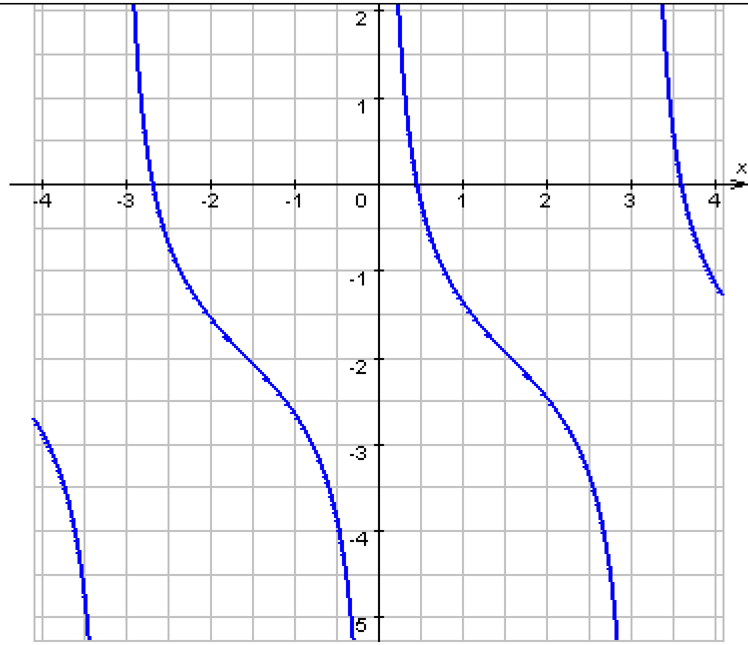
1	$y = \tilde{n}tg\,x$ **«Основной» график**	
2	$y = 2\tilde{n}tg\,x$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОУ** **в 2 раза**	

3	$y = \frac{1}{2}\tilde{n}tg\,x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОУ** **в** 2 **раза**	 
4	$y = \tilde{n}tg\,2x$ **<u>Сжатие</u>** **вдоль оси ОХ** **в** 2 **раза**	

		
5	$y = \tilde{n}tg\,\frac{x}{2}$ **<u>Растяжение</u>** **вдоль оси ОХ** **в 2 раза**	

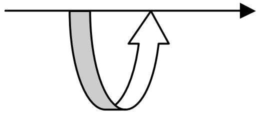
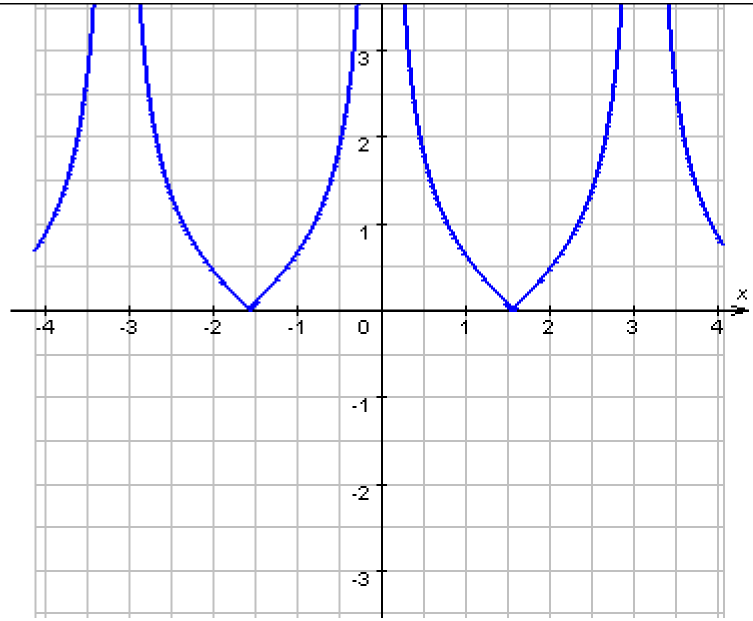
6	$y = \tilde{n}tg\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ вправо** **на** $\dfrac{\pi}{6}$ **(на 1 клетку)**	
7	$y = \tilde{n}tg\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОХ влево** **на** $\dfrac{\pi}{3}$ **(на 2 клетку)**	

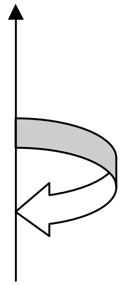
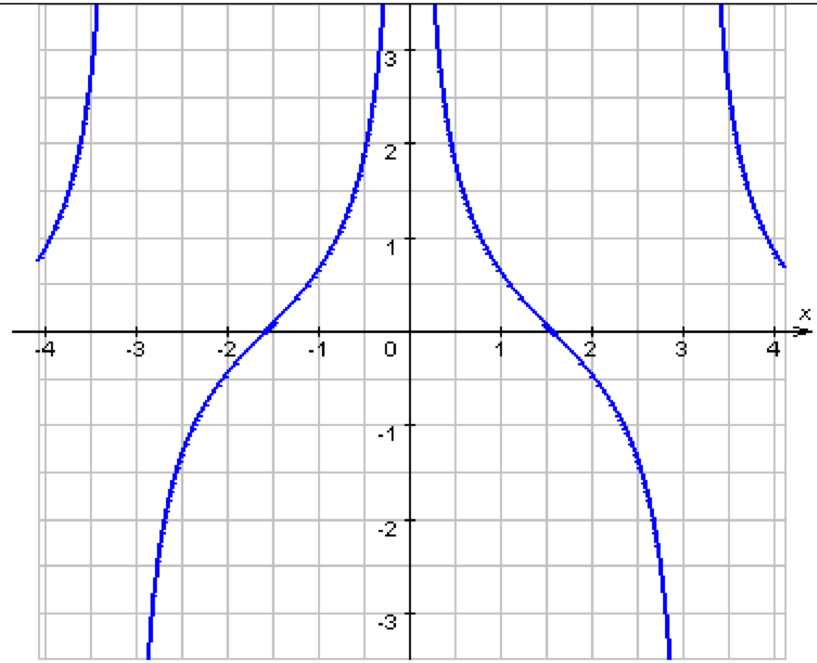
8	$y = \tilde{n}tg\,x + 1$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОУ вверх на** 1 **единичный отрезок** (2 **клетки**)	

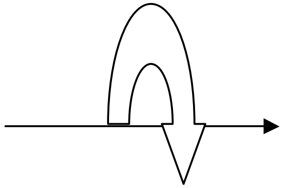
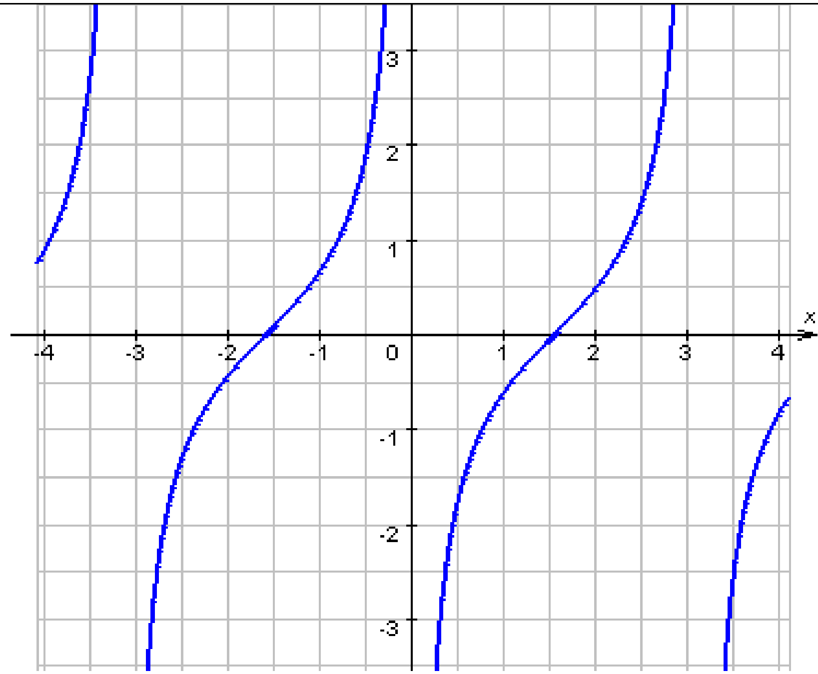
9	$y = \tilde{n}tg\,x - 2$ **<u>Параллельный перенос (сдвиг)</u>** **вдоль оси ОУ вниз на** 2 **единичных отрезка** (4 **клетки**)	

<table>
<tr>
<td>10</td>
<td>$y = \left|\tilde{n}tg\,x\right|$

<u>Отражение</u>

относительно оси ОХ</td>
<td> 
</td>
</tr>
</table>

11	$y = \tilde{n}tg\ \lvert x \rvert$ **<u>Отражение</u>** **относительно оси ОУ**	 

12	$y = -\tilde{n}tgx$ **<u>Поворот</u> на** 180^{0} **вокруг оси ОХ**		

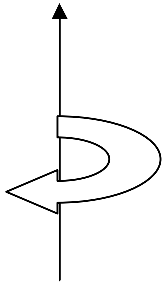
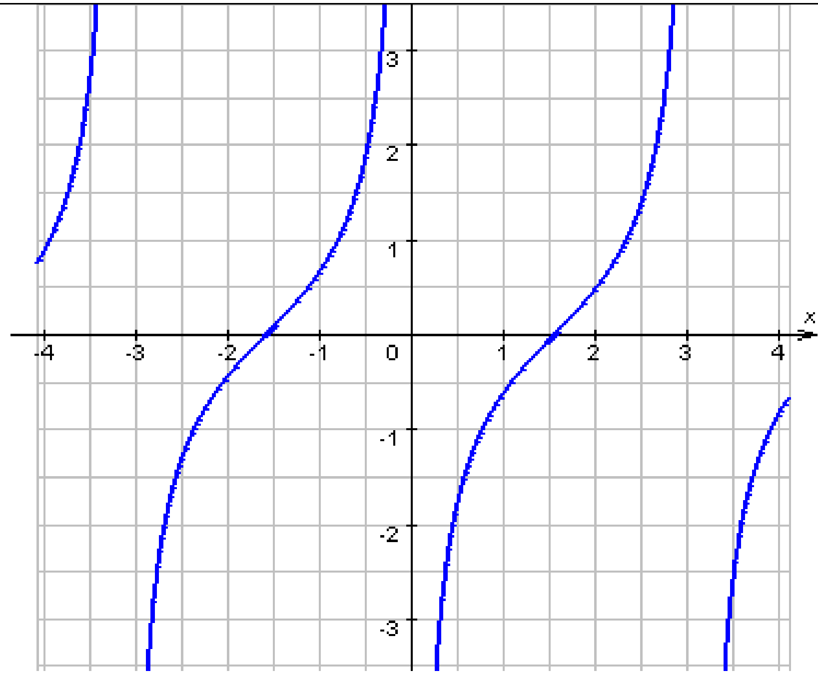
13	$y = \tilde{n}tg(-x)$ **<u>Поворот</u>** **на** 180^0 **вокруг оси O**Y	 

Схема исследования функции

Монотонность функции

Функция f(x) называется возрастающей на данном числовом промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Представьте, что некоторая точка движется по графику слева направо. Тогда точка будет как бы "взбираться" вверх по графику.

Функция f(x) называется убывающей на данном числовом промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Представьте, что некоторая точка движется по графику слева направо. Тогда точка будет как бы "скатываться" вниз по графику.

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется монотонной на этом промежутке.

Нули функции и промежутки знакопостоянства

Значения x, при которых y=0, называется нулями функции. Это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox.

Такие промежутки значений x, на которых значения функции y либо только положительные, либо только отрицательные, называются промежутками знакопостоянства функции.

Четные и нечетные функции

Четная функция обладает следующими свойствами:

1) Область определения симметрична относительно точки (0; 0), то есть если точка a принадлежит области определения, то точка -a также принадлежит области определения.

2) Для любого значения x, принадлежащего области определения , выполняется равенство f(-x)=f(x)

3) График четной функции симметричен относительно оси Oy.

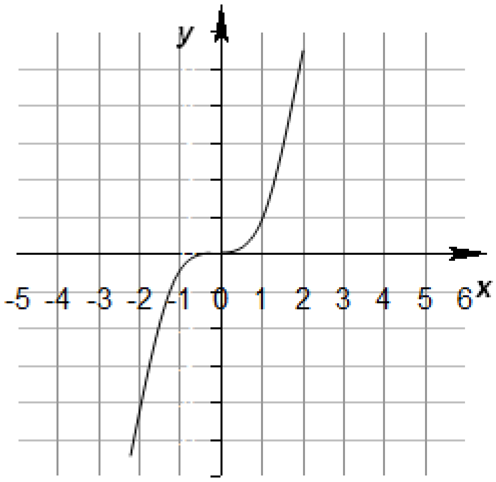
Нечетная функция обладает следующими свойствами:

1) Область определения симметрична относительно точки (0; 0).

2) для любого значения x, принадлежащего области определения , выполняется равенство f(-x)=-f(x)

3) График нечетной функции симметричен относительно начала координат (0; 0).

Не всякая функция является четной или нечетной. Функции общего вида не являются ни четными, ни нечетными.



нечетная функци, график симметричен относит (0; 0)

Периодические функции

Функция f называется периодической, если существует такое число , что при любом x из области определения выполняется равенство f(x)=f(x-T)=f(x+T). T - это период функции.

Всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период.

Значения периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются. Это используют при построении графиков.

Задачи для самостоятельного решения по теме: «Функции их свойства и графики»

1 вариант	***2 вариант***	***3вариант***	***4 вариант***	***5 вариант***	***6 вариант***
Задание № 1: построить график функции:					
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Задание № 2: на основании графика функции определить основные свойства по плану:

1. Область определения функции;
2. Область значений функции;
3. Четность, нечетность функции;
4. Точки пересечения графика с осями координат;
5. Асимптоты графика функции;
6. Промежутки монотонности функции и ее экстремумы;
7. Промежутки знакопостоянства.

1 вариант		***2 вариант***	
1.	[illegible]	1.	[illegible]
2.	[illegible]	2.	[illegible]
3.	[illegible]	3.	[illegible]
4.	[illegible]	4.	[illegible]

Задание № 2: на основании графика функции определить основные свойства по плану:

1. Область определения функции;
2. Область значений функции;
3. Четность, нечетность функции;
4. Точки пересечения графика с осями координат;
5. Асимптоты графика функции;
6. Промежутки монотонности функции и ее экстремумы;
7. Промежутки знакопостоянства.

Критерии оценок

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 91% -100% предлагаемых заданий, допустим 2 недочета, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 81% -90% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% -80% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

Самостоятельная работа №8 (15 час)

Тема: «Многогранники»

Цели: изображать многогранники на рисунке, решать типовые задачи, используя теоретические знания по теме, правильно использовать термины.

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.
Теоретический материал

Двугранный угол.

Выучи. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями (гранями двугранного угла) с общей ограничивающей их прямой (ребром двугранного угла).

Линейным углом двугранного угла называется угол между полупрямыми, по которым плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани.

Мерой двугранного угла называется мера соответствующего ему линейного угла.

Замечания (обрати внимание).

1.**Линейный угол двугранного угла** - это угол с вершиной на ребре двугранного угла, образованного двумя лучами, лежащими в гранях двугранного угла и перпендикулярными его ребру.

2.Мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

Классификация двугранных углов по величине.

Определение многогранника.

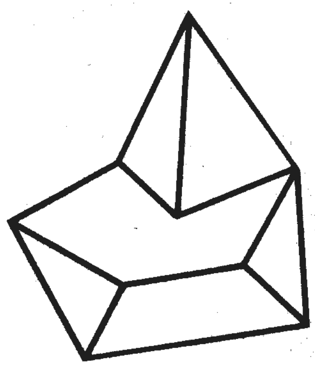
Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Плоские многоугольники называются гранями многогранника.

Ребрами многогранника называются стороны его граней.

Вершинами – вершины граней.

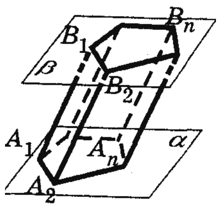
Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону (лежит в одном полупространстве) относительно плоскости каждой его грани.



Призма. Виды призм.

Выучи.

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников



Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие вершины, - боковыми ребрами призмы.

$A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – основания призмы.

$A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …., $A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани призмы,

A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n –боковые ребра призмы.

Обрати внимание: призма обозначается последовательным названием ее оснований:

$A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n$.

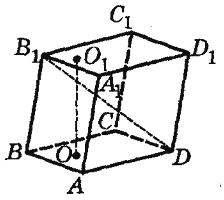
Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой – либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания (или расстояние между плоскостями оснований призмы)

Диагональю призмы называется отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

Рассмотри рисунок.

OO_1 – высота призмы

B_1D – диагональ призмы.



Запомни.

Свойства призмы.

1) Основания призмы – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.
2) Боковые ребра призмы параллельны и равны.
3) Боковые грани призмы – параллелограммы

Запомни.

Определение диагонального сечения призмы

Диагональным сечением призмы называется сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.

- Сечением призмы плоскостью, параллельной основаниям, является многоугольником, равным многоугольникам оснований.

- Сечением призмы плоскостью, параллельной боковым ребрам, является параллелограммом.

Виды призм.

Прямая призма.

Выучи.

Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма.

Наклонная призма.

Выучи.

Призма называется наклонной, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям.

$KLMK_1L_1M_1$ – наклонная призма.

Обрати внимание и используй при решении задач.

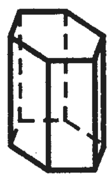
Свойства прямой призмы:

Основания прямой призмы – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях.

Боковые ребра прямой призмы параллельны, равны и перпендикулярны плоскостям оснований (являются высотами). Высота прямой призмы равна длине бокового ребра.

Правильная призма.

Правильной призмой называется прямая призма, основания которой – правильные многоугольники.



Задача (разбери решение, запиши в тетрадь).

В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см.

Найди площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

Задача (воспользуйся планом решения и реши задачу).

Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45^0. сторона основания л. Найдите боковую поверхность призмы.

План решения.

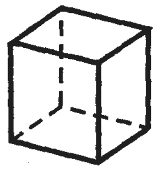
1) Построй линейный угол двугранного угла между сечением АВМ и основанием призмы АВС.
2) Из прямоугольного треугольника МСН определи угол МСН
3) Треугольник АВМ – равнобедренный (докажи).
4) Найди СН.
5) Найди МС.
6) Вычисли периметр основания.
7) Вычисли боковую поверхность призмы.

$S_{бок.\ пов.} = 3 * \sqrt{3}\, l^2$

Параллелепипед.

Параллелепипедом называется призма, основание которой – параллелограмм

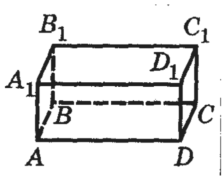
Обрати внимание: так как параллелепипед является призмой, то все свойства призмы справедливы и для параллелепипеда.



Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими.

АВСД и $A_1B_1C_1Д_1$, AA_1B_1B и $ДД_1C_1C$, $AA_1Д_1Д$ и BB_1C_1C – противолежащие грани.

Грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными.



ТЕОРЕМА (выучи) Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.

ТЕОРЕМА (выучи) Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является центром его симметрии.

Виды параллелепипедов. **Прямоугольный параллелепипед.**

Выучи.

Параллелепипед называется прямым, если его боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований.

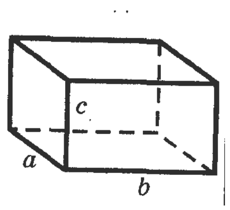
Обрати внимание: прямой параллелепипед является прямой призмой, основание которой – параллелограмм.

Свойства прямоугольного параллелепипеда:

1) Основания прямого параллелепипеда – равные параллелограммы, лежащие в параллельных плоскостях.
2) Боковые ребра прямого параллелепипеда параллельны, равны и перпендикулярны плоскостям оснований. Высота прямого параллелепипеда равна длине бокового ребра.
3) Противолежащие боковые прямого параллелепипеда – равные прямоугольники. Плоскости боковых граней перпендикулярны плоскостям оснований.
4) Диагонали прямого параллелепипеда точкой пересечения делятся пополам.

Прямоугольный параллелепипед (выучи)

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник.



Запомни:

длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями).

Теорема (выучи):

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Свойства прямоугольного параллелепипеда:

1. Противолежащие грани прямоугольного параллелепипеда (в том числе основания) — равные прямоугольники.

2. Боковые ребра прямоугольного параллелепипеда параллельных, равны и перпендикулярны плоскостям оснований.

3. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.

4. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны и точкой пересечения делятся пополам.

5. Диагональные сечения прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.

Определение куба (выучи):

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны.

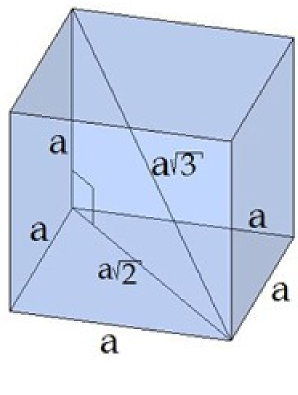
Свойства куба:

1. Все грани куба равные квадраты.

2. Из каждой вершины куба исходят три взаимно перпендикулярных равных ребра.

3. Все двугранные углы куба — прямые.

4. Диагонали куба с ребром a равны a√3 и точкой пересечения делятся пополам.

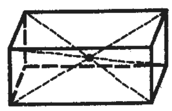
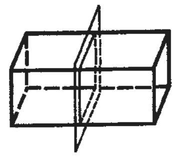
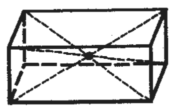
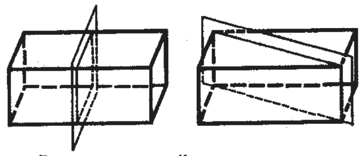
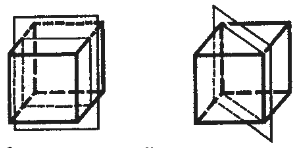


Так как у куба все измерения равны, обозначаем их за **a**, тогда

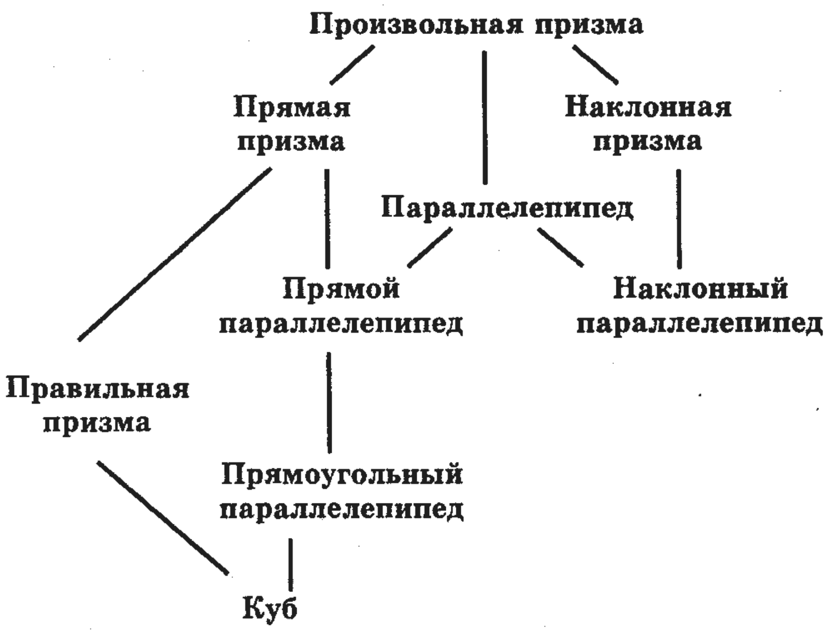
$$D^2=a^2+a^2+a^2=3a^2.$$

Упрощаем и получаем формулу диагонали куба:

5. Диагональное сечение куба с ребром a — прямоугольник со сторонами a и a√2

Элементы симметрии параллелепипедов		
Вид параллелепипеда	**Центр симметрии**	**Плоскость симметрии**
Прямоугольный параллелепипед, все измерения которого различны	 Точка пересечения диагоналей	 3 плоскости симметрии
Прямоугольный параллелепипед, в котором два измерения равны	 Точка пересечения диагоналей	 5 плоскостей симметрии
Куб	 Точка пересечения диагоналей	 9 плоскостей симметрии

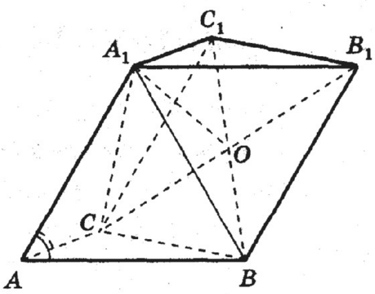
Виды призм



Задача(разбери готовое решение):

Все ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы BAA_1 и CAA_1 равны $60°$ каждый. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CA_1B_1, если площадь грани ABB_1A_1 равна $8\sqrt{3}$.

Решение. 1) Пусть ребро призмы равно a. Боковые грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 — ромбы с углом 60°. Поэтому BA_1, CA_1 также равны a. Так как $S_{ABB_1A_1} = a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$, то $a^2 = 16$, $a = 4$.



2) В пирамиде $A_1BCC_1B_1$ все ребра равны a. Пусть O — точка пересечения диагоналей BC_1 и CB_1 ее основания. Тогда A_1O — медиана в равнобедренных треугольниках BA_1C_1 и B_1A_1C. Значит, она и высота в них. Поэтому $A_1O \perp BCC_1B_1$.

3) Из равенства прямоугольных треугольников OA_1B_1 и OA_1C_1 получаем, что $OB_1 = OC_1$ и, значит, в ромбе BCC_1B_1 равны диагонали, т. е. он — квадрат. Так как $C_1O \perp CB_1$ и $C_1O \perp A_1O$, то $C_1O \perp CA_1B_1$, т. е. длина C_1O есть искомое расстояние. Так как BCC_1B_1 — квадрат со стороной 4, то $C_1O = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Правильные многогранники.

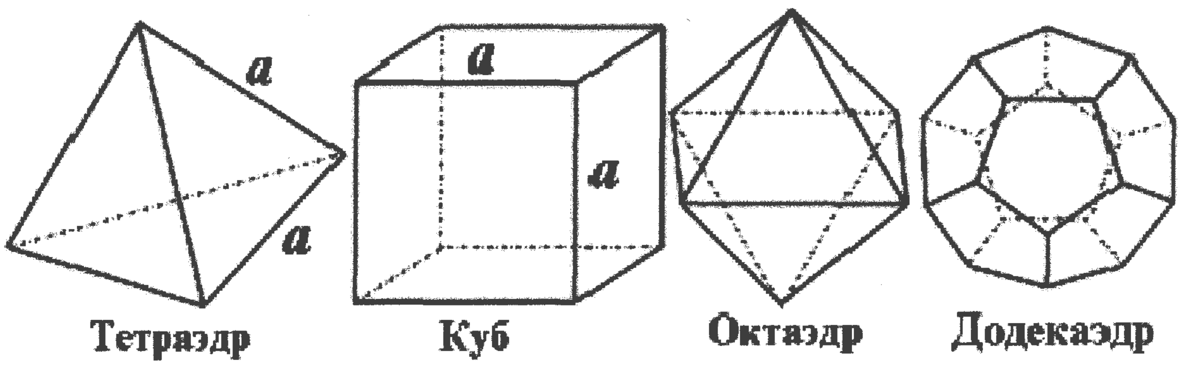
Определение

Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

Свойства правильных многогранников

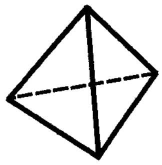
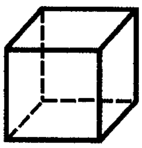
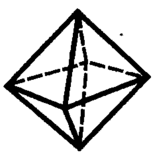
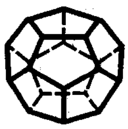
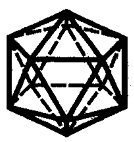
1.Все ребра правильного многогранника равны.

2.Все двугранные углы правильного многогранника, содержащие грани с общим ребром, равны.



Икосаэдр

Теорема Эйлера. Число вершин – число ребер + число граней = 2

Виды правильных многогранников							
	Вид многогранника	**Вид грани**	**Сумма плоских углов при вершине**	**Число ребер при вершине**	**Число граней**	**Общее число вершин**	**Общее число ребер**
	Правильный тетраэдр	Равносторонний треугольник	180°	3	4	4	6
	Куб (правильный гексаэдр)	Квадрат	270°	3	6	8	12
	Правильный октаэдр	Равносторонний треугольник	240°	4	8	6	12
	Правильный додекаэдр	Правильный пятиугольник	324°	3	12	20	30
	Правильный икосаэдр	Равносторонний треугольник	300°	5	20	12	30

Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.

Слово «пирамида» в геометрию ввели греки, которые, как полагают, заимствовали его у египтян, создавших самые знаменитые пирамиды в мире. Другая теория выводит этот термин из греческого слова «пирос» (рожь) – считают, что греки выпекали хлебцы, имевшие форму пирамиды.

Пирамида – это многогранник, одна из граней которого – произвольный многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной.

- многоугольник называется основанием пирамиды;

- треугольники называются боковыми граням,

- ребра пирамиды, не принадлежащие основанию, называются ее боковыми ребрами,

- общая вершина всех боковых граней называется вершиной пирамиды,

-объединение боковых граней пирамиды называется ее боковой поверхностью.

- перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды.

Рассмотри рисунок:

МАВС – треугольная пирамида, треугольник АВС – основание, точка М – вершина,

МА, МВ, МС – боковые ребра пирамиды, МАВ, МАС, МВС – боковые грани пирамиды,

МН – высота.

Правильная пирамида.

Прочитай, это интересно.

Одним из примеров правильной пирамиды являются египетские пирамиды.

Первую пирамиду долго строили и перестраивали, всё это заняло 29 лет. Получилась шести ступенчатая пирамида. Издали она выглядит как шесть поставленных друг на друга масштаб. Ступенчатая форма пирамиды означала лестницу с шестью ступеньками, ведущую к площадке наверху (седьмой ступеньки). И это число – семь – совпадает с количеством планет, известных древним египтянам. Так же оно символизирует семь стадий, которые, по мнению древних, преодолевает душа в потустороннем мире.

Выучи:

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой этой пирамиды. Все апофемы равны друг другу.

Обрати внимание на рисунок:

МР – апофема пирамиды, или, что то же самое, высота боковой грани. (МР перпендикулярна АС).

Обрати внимание и используй при решении задач.

Некоторые свойства правильной пирамиды:

- все боковые ребра равны между собой;

-все боковые грани – равные равнобедренные треугольники;

- все двугранные углы при основании равны;

- все плоские углы при вершине равны;

- все плоские углы при основании равны;

- апофемы боковых граней одинаковы по длине.

Усеченная пирамида.

Усеченная пирамида – часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Рассмотри рисунок:

$ABCA_1B_1C_1$ – усеченная пирамида

ABC – нижнее основание усеченной пирамиды;

$A_1B_1C_1$ – верхнее основание усеченной пирамиды;

OO_1 – высота усеченной пирамиды;

ACC_1A_1, BCC_1B_1, ABB_1A_1 – боковые грани усеченной пирамиды.

HH_1 – высота боковой грани усеченной пирамиды.

Запомни: основания правильной усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а боковые грани – равнобедренные трапеции.

Обрати внимание на свойства усеченной пирамиды и используй при решении задач:

- боковые ребра и высота пирамиды разделяются на пропорциональные отрезки;

- в сечении получится многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании;

- площади сечения и основания будут относиться между собой, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

Проверь себя. Ответь на контрольные вопросы.

1) Что такое двугранный угол (грань угла, ребро угла)?

2) Что такое линейный угол двугранного угла?

3) Что такое многогранник?

4) Что такое призма (основания призмы, боковые грани, ребра)?

5) Что такое высота призмы, диагональ призмы?

6) Что такое параллелепипед?

7)Что такое пирамида (основание пирамиды, боковые грани, ребра, высота)?

8) Какая пирамида называется правильной?

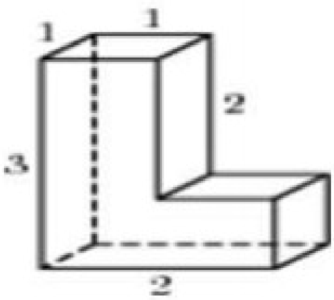
9) Что такое апофема правильной пирамиды?

10) Объясните, что такое усеченная пирамида.

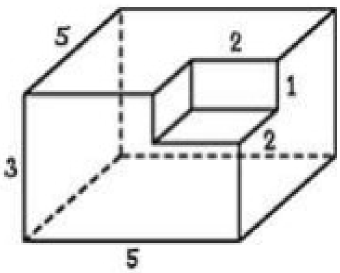
Задачи для самостоятельного решения по теме: «Многогранники»

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

1 вариант

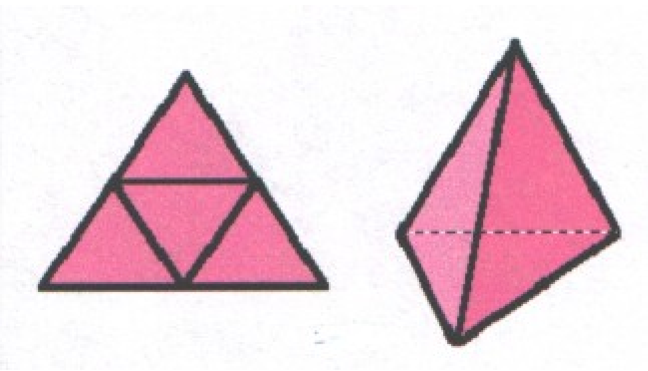


2 вариант



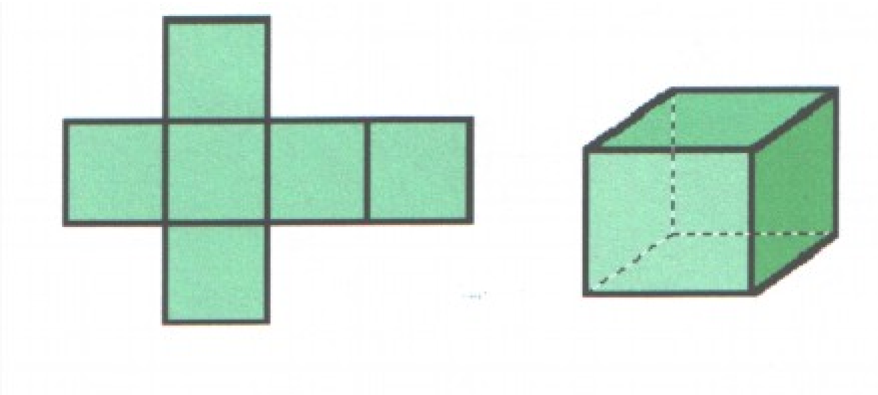
Задание №1.

На рисунке изображена развертка правильного тетраэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги в большом масштабе, вырежьте развертку и склейте из неё тетраэдр.



Задание №2.

На рисунке изображена развертка куба. Перерисуйте её на плотный лист бумаги в большом масштабе, вырежьте развертку и склейте из неё куб.

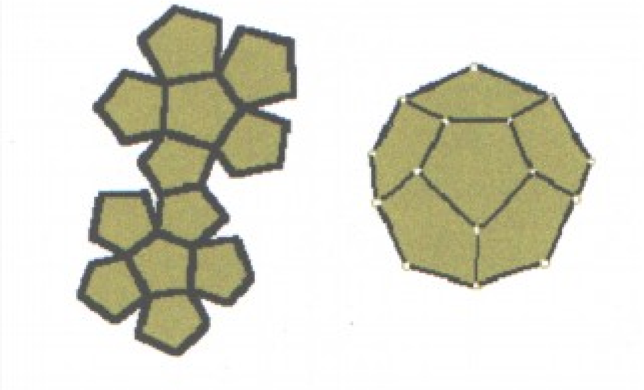


Задание №3.

На рисунке изображен развертка правильного октаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги в большом масштабе, вырежьте развертку и склейте из неё октаэдр.

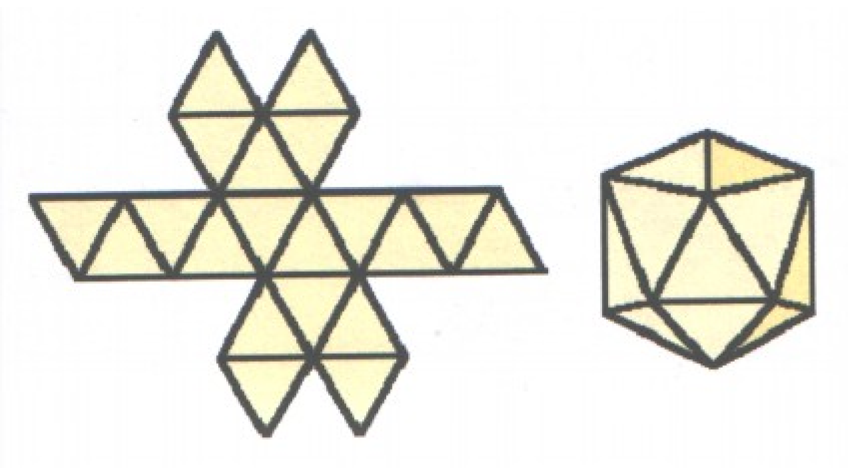
Задание №4.

На рисунке изображена развертка правильного додекаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги в большом масштабе, вырежьте развертку и склейте из неё додекаэдр.



Задание №5.

На рисунке изображена развертка правильного икосаэдра. Перерисуйте её на плотный лист бумаги в большом масштабе, вырежьте развертку и склейте из неё икосаэдр.



Лабораторная работа.

Цель работы: вычисление площадей поверхностей правильных многогранников.

Оборудование: модели правильных многогранников, справочные материалы.

Работу выполнить предварительно изготовить правильные многогранники (студенты работают с многогранниками которые сделали сами).

Ход работы

1. Сколько граней имеет ваш многогранник?
2. Что представляет из себя каждая грань многогранника?
3. Как найти площадь поверхности многогранника?
4. Сделайте необходимые измерения и вычислите площадь поверхности многогранника.
5. Формулы для вычисления площади поверхности вашего многогранника.

$S_{тетр.} = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

$S_{окт.} = 8.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$

$S_{\ икос.} = 20.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$

$S_{гекс.} = 6a^2$

$S_{дод.} = 12.\frac{1}{2}Pr = 6Pr.$

Решение задач «Многогранники»

1. В основании правильной четырехугольной призмы лежит квадрат со стороной а = 4 см. диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 60^0. Найдите:

a) Диагональ основания призмы;

b) Диагональ призмы;

c) Высоту призмы;

d) Площадь диагонального сечения призмы;

e) Площадь сечения, проходящего через середины двух смежных сторон нижнего основания параллельно диагональному сечению;

f) Площадь сечения, проходящего через середины двух противоположных сторон основания параллельно боковой грани.

2. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием, равным 6 см., и углом при вершине 120°. Диагональ боковой грани, содержащей основание равнобедренного треугольника, равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности. $(48 + 32\sqrt{3})$

3. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$- треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C$, BC=2, sinA=0,3. Высота призмы равна $\sqrt{5}$. Найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью ACC_1. (0,2)

4. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной призмы, сторона основания которой 3 см, диагональ боковой грани 5 см.

5. Найдите высоту и объем правильной четырехугольной призмы, если сторона основания 2 см, а диагональ составляет с плоскость основания угол 450.

6. Основание прямой призмы равнобедренный треугольник с основанием 10 см и боковой стороной 13 см. найдите объем призмы, если ее высота 2 см.

Решение задач «Пирамида»

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12 см, а боковое ребро 10 см. Найдите:

a) Высоту пирамиды;
b) Угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания пирамиды;
c) Угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды;
d) Площадь боковой поверхности пирамиды;
e) Площадь полной поверхности пирамиды;
f) Объем пирамиды;
g) Площадь сечения, проходящего через высоту основания и высоту пирамиды;
h) Площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды, параллельно основанию;
i) Площадь сечения, проходящего через высоту основания и середину боковой стороны.

2. Через вершину квадрата АВСД (АВ = $6\sqrt{2}$) проведен к его плоскости перпендикуляр ВК, равный 4см. найдите расстояние от точки К до а) вершины Д, б) прямых, содержащих сторону СД и диагональ АС, в) расстояние от точки пересечения диагоналей до КД.

3. Основание пирамиды квадрат АВСД со стороной 3 см. высота пирамиды, равная 4 см, проходит через вершину В. а) докажите, что все боковые грани пирамиды – прямоугольные треугольники; б) вычислите площадь поверхности пирамиды.

4. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $6\sqrt{2}$ см, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 600. Найдите : а) площадь боковой поверхности пирамиды; б) объем пирамиды.

5. Основание пирамиды прямоугольник со сторонами 6см и 8 см, высота пирамиды 12см, боковые ребра равны. Найдите: а) площадь поверхности пирамиды; б) объем пирамиды.

6. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 10 см и образует угол 600 с плоскостью основания. Найдите : а) площадь поверхности пирамиды; б) объем пирамиды.

7. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см. боковые ребра пирамиды образуют углы 450 с плоскостью основания. Найдите высоту пирамиды.

Критерии оценок

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 91% -100% предлагаемых заданий, допустим 2 недочета, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 81% -90% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% -80% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

Самостоятельная работа №9 (5 час)

Тема: «Тела и поверхности вращения»

Цели: изображать тела вращения на рисунке, решать типовые задачи, используя теоретические знания по теме, правильно использовать термины.

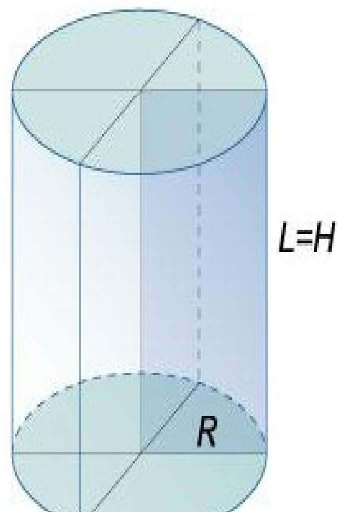
Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

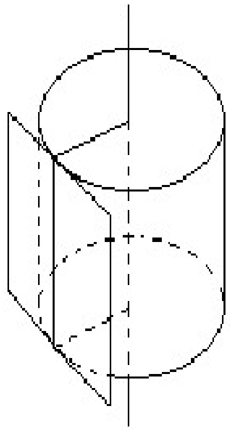
Ход работы.
Теоретический материал

1.1 Цилиндр.



Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образуемая движением прямой сохраняющей одно и тоже направление и пересекающей направляющую линию. Прямые линии, соответствующие различным положениям прямой, называются образующими цилиндрической поверхности. Таким образом **цилиндр** это тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями.

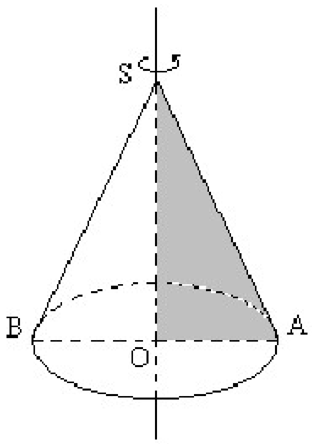
Призмой вписанной в цилиндр, называется такая призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами – образующие.



Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.

Призма описана около цилиндра, если у нее плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра.

Призма это частный вид цилиндра. Произвольный цилиндр можно рассматривать как выродившуюся, сглаженную призму с очень большим числом очень узких граней. Все свойства призмы сохраняются для цилиндра.



1.2 Конус.

Конус – тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими, конуса. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Конус получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг катета.

2. т. S – вершина конуса

круг(O,OA) – основание конуса

SA=SB – образующие конуса

Отрезок SO – высота конуса - перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания

Прямая SO – ось конуса - прямая, содержащая его высоту.

Сечения конуса:

а) осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник

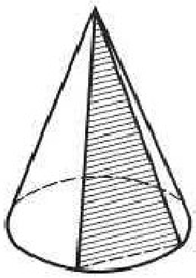


Рис. 444

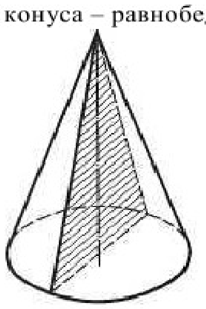
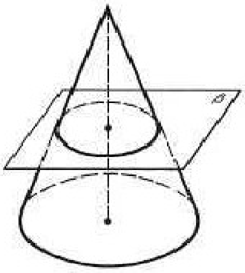
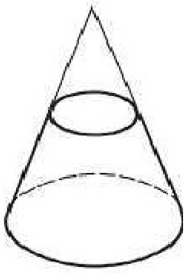


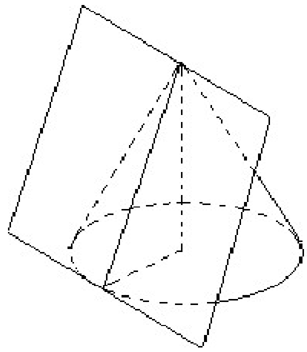
Рис. 445

б) сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину – равнобедренный треугольник

в) сечение конуса плоскостью, перпендикулярно оси симметрии – круг







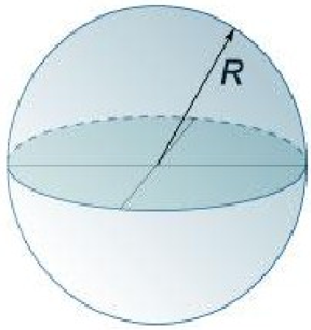
Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.

Описанная пирамида – пирамида, у которой основанием служит многоугольник, описанный около основания конуса, вершина – вершина конуса, боковые грани – касательные плоскости конуса.

Шар — геометрическое тело; совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше заданного. Это расстояние называется *радиусом шара*. Шар образуется вращением полукруга около его неподвижного диаметра. Этот диаметр называется *осью шара*, а оба

конца указанного диаметра — *полюсами шара*. Поверхность шара называется **сферой**: **замкнутый шар** включает эту сферу, **открытый шар** — исключает.

Если секущая плоскость проходит через центр шара, то сечение шара называется *большим кругом*. Другие плоские сечения шара называются *малыми кругами*. Площадь этих сечений вычисляется по формуле πR^2.

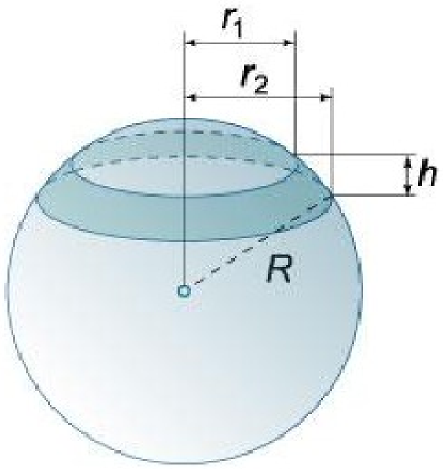


1. *Площадь сферы*
   $S = 4\pi R^2$

2. *Объем шара*
   $V = 4\pi R^3/3$

7. *Площадь полной поверхности шарового сегмента*
   $S = S_{осн} + S_{сегм} = \pi(h^2 + 2r^2) = \pi(2Rh + r^2)$

8. *Объем шарового сегмента*
   $V = \pi h^2(3R - h)/6 = \pi h(3r^2 + h^2)/6$



9. *Шаровым слоем* называется часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями.

10. *Площадь внешней поверхности шарового слоя*
    $S_{сл} = 2\pi Rh$,
    где h − высота шарового слоя, R − радиус шара.

11. *Площадь полной поверхности шарового слоя*
    $S = S_{сл} + S_1 + S_2 = \pi(2Rh + r_1{}^2 + r_2{}^2)$,
    где h − высота шарового слоя, R − радиус шара, r_1, r_2 − радиусы оснований шарового слоя, S_1, S_2 − площади этих оснований.

Решение задач

3. Прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 4 см, вращается около меньшей стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Дано:
ABCD – прямоугольник,
AB = 6 см,
BC = 4см,
BC – ось вращения.

Найти: $S_{птв}$

Решение. Данное тело вращения – прямой круговой цилиндр с высотой BC = 4 см и радиусом основания AB = 6 см.

Площадь боковой поверхности

$$S_{бп} = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi (см^2)$$

Площадь основания

$$S_{осн} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi (см^2)$$

Площадь полной поверхности

$$S_{птв} = 48\pi + 2 \cdot 36\pi = 120\pi (см^2)$$

Ответ: 120π $(см^2)$.

2.2 Задачи по теме «Конус»

1. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую l.

Дано: конус,

r = 3 м,

h =4 м,

Найти: *l* – образующая конуса

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник, катетами которого являются высота конуса и радиус основания, а гипотенузой – образующая конуса. По теореме Пифагора получим:

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м}$$

Ответ: 5 м.

2.*Радиус основания конуса R.. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.*

Дано: конус,

R – радиус основания,

ΔABC – осевое сечение конуса,

$\angle C = 90^0$

Найти: $S_{\Delta ABC}$

Решение. Так как этот прямоугольный треугольник является еще и равнобедренным, то высота в нем, проведенная к основанию, является и медианой. Медиана, проведенная к гипотенузе равна половине гипотенузы, то есть, радиусу, так как гипотенуза равна диаметру.

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2$$

Ответ: R^2.

3. *В равностороннем конусе (осевое сечение – правильный треугольник) радиус основания R .Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α.*

Дано: конус,

R – радиус основания,

ΔABC – осевое сечение конуса,

MC, KC – образующие конуса,

$\angle(MC, KC) = \alpha$

Найти: $S_{\Delta MCK}$

Решение. Так как в осевом сечении ΔABC – правильный, то образующая AC = AB = 2R. Площадь ΔMCK найдем по формуле

$$S_{\Delta MCK} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot CK \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R \cdot \sin\alpha = 2R^2 \sin\alpha$$

Ответ: $2R^2 \sin\alpha$.

4. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Дано: конус,

α – плоскость,

R – радиус основания,

CD = H,

C – вершина конуса,

CK = d

Найти: $S_{сеч}$

Решение.

Сечение конуса получается из основания конуса преобразованием гомотетии (гомотетия – преобразование подобия, то есть, преобразование фигуры F в фигуру F', при котором расстояние между точками изменяются в одно и то же число раз) относительно вершины конуса с коэффициентом гомотетии $k = \frac{d}{H}$. Поэтому $k = \frac{r}{R} = \frac{d}{H}$ и $r = \frac{R \cdot d}{H}$. Следовательно, площадь сечения

$$S_{сеч} = \pi \cdot r^2 = \pi R^2 \frac{d^2}{H^2}.$$

Ответ: $\pi R^2 \frac{d^2}{H^2}$.

5. Высота конуса Н. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

Дано: конус,

α – плоскость,

Н - высота,

$$S_{сеч} = \pi \cdot r^2$$

$$S_{осн} = \pi \cdot R^2$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} S_{осн}$$

Найти: h

Решение.

Проведенная плоскость отсекает подобный конус. В подобных фигурах отношение линейных размеров равно коэффициенту подобия, а отношение соответствующих площадей – квадрату коэффициента подобия. Значит, $\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{R^2}{r^2} = k^2 = \frac{1}{2}$. Отсюда $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $\frac{h}{H} = k$ и $h = H \cdot k = \frac{H}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\frac{H}{\sqrt{2}}$.

2.3 Задачи по теме «Шар и сфера»

1.Радиус сферы увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличится площадь сферы?

Дано: r – радиус исходной сферы,

R – радиус новой сферы,

R = 3r

Найти: $\frac{S_R}{S_r} - ?$

Решение.

$$\frac{S_R}{S_r} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{(3r)^2}{r^2} = 9$$

Ответ: в 9 раз.

2. Шар, радиуса 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

Дано: шар,

R = 41 дм,

OA = 9 дм,

O – центр щара.

Найти: $S_{сеч}$

Решение.

Из прямоугольного треугольника ABC: $AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ дм.

Площадь сечения

$$S_{сеч} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot AB^2 = 1600\pi(дм^2) = 16\pi(м^2)$$

Ответ: 16 $м^2$.

3.Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Дано: шар,

R – радиус шара,

α – плоскость,

OA = 1/2R,

O – центр щара.

Найти: $\frac{S_{сеч}}{S_{бк}}$

Решение. Из прямоугольного треугольника AOB:

$$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}R)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{S_{сеч}}{S_{бк}} = \frac{\pi \cdot AB^2}{\pi \cdot OB^2} = \frac{(\frac{R\sqrt{3}}{2})^2}{R^2} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

4. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 600 к нему. Найти площадь сечения.

Дано: шар,

R – радиус шара,

$\angle ABO = 60^0$,

O – центр щара.

Найти: $S_{сеч}$

Решение. Из прямоугольного треугольника AOB: $AB = OB\cos 60^0 = \dfrac{R}{2}$.

Площадь сечения

$$S_{сеч} = \pi \cdot AB^2 = \pi(\frac{R}{2})^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$

πR^2

5. Город N находится на 600 северной широты. Какой путь совершает этот пункт в течение 1 ч. Вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли принять равным 6000 км.

Дано: шар,

R = 6000 км,

$\angle NOK = 60^0$,

O – центр щара.

Найти: S- путь

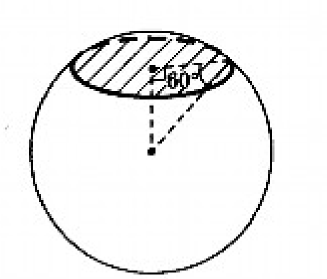
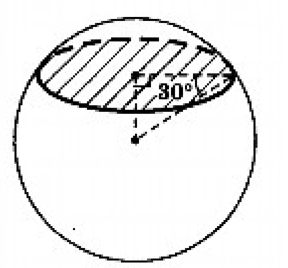
Решение.

В прямоугольном треугольнике AON: $\angle ANO = \angle NOK = 60^0$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и OK). Тогда $AN = ON\cos 60^0 = \dfrac{R}{2}$. За один час город N опишет дугу, равную 1/24 части длины окружности с радиусом AN. Значит,

$$S = \frac{1}{24} \cdot 2\pi AN = \frac{1}{24} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 6000 \approx 785(км)$$

Ответ: 785 км.

Задачи для самостоятельного решения по теме: «Тела вращения»

1 вариант	2 вариант
1. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения	1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого равна 16 см ^{2}. Чему равна площадь основания цилиндра?
2. Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найдите радиус основания и высоту конуса.	2. Высота конуса равна 8 м, радиус основания 6 м. Найдите образующую конуса.
3. Образующая конуса равна 6 м и наклонена к плоскости основания по углом 60^0. Найдите площадь основания конуса.	3. Образующая конуса равна 8 см, а угол при вершине осевого сечения 60^0. Найдите площадь осевого сечения.
4. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1:3, образующая составляет с плоскостью основания угол 45^0, высота равна 4 см. Найдите площади оснований.	4. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1:2, образующая составляет с плоскостью основания угол 60^0, высота равна 2 см. Найдите площади оснований.
5. Дан шар радиуса . Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60^0 к нему. Найдите площадь сечения. 	5. Дан шар радиуса . Через конец радиуса проведена плоскость под углом 30^0 к нему. Найдите площадь сечения. 

Критерии оценки самостоятельной работы №3-1

Отметка	Количество задач, необходимое для получения отметки
« **5**» (отлично)	5
« **4**» (хорошо)	4-3
« **3**» (удовлетворительно)	2
« **2** « (неудовлетворительно)	менее 2

Самостоятельная работа №10 (20час)

Тема: Производные основных элементарных функций.

Цели: знать понятие производной функции, основные формулы и правила дифференцирования элементарных функций, решать задачи на отыскание производной элементарных функций, применять ее при решение уравнение касательной, знать алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции; уметь: находить наибольшее и наименьшее значения функции, применяя алгоритм. На конкретных примерах научиться исследовать функции с помощью производной и на основе исследования строить графики.

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.
Теоретический материал

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(c)' = 0$, c - const
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(a^x)' = a^x \ln a$
9. $(e^x)' = e^x$
10. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
11. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
12. $(\cos x)' = -\sin x$
13. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
14. $\left((kx+b)^{\alpha}\right)' = \alpha k(kx+b)^{\alpha-1}$

Правила дифференцирования.

1. $(Cf(x))' = Cf'(x)$ - вынесение константы за знак производной.

2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ - производная суммы равна сумме производных.

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ - производная произведения.

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$ - производная частного.

Пример 1. Используя формулу $(x^P)' = p \cdot x^{p-1}$, найдите производные:

а) $(x^6)' = 6x^5$; **б)** $(x^{-6})' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7}$; **б)** $(x^{\frac{1}{6}})' = \dfrac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1} = \dfrac{1}{6}x^{\frac{-5}{6}}$;

в) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = \dfrac{-4}{x^5}$;

г) $(\sqrt[4]{x^3})' = (x^{\frac{3}{4}})' = \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$;

д) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\dfrac{3}{4}x^{-1\frac{3}{4}} = -\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$.

Пример 2. Вычислите производные:

а) $(x^6 - 3x^5 + 6x - 8)' = 6x^5 - 3\cdot 5x^4 + 6\cdot 1 - 0 = 6x^5 - 15x^4 + 6$

б) $\left(\dfrac{6}{x^2}\right)' = (6x^{-2})' = 6\cdot(-2x^{-3}) = -12x^{-3} = \dfrac{-12}{x^3}$

в) $\left(4\sqrt{x}\right)' = 4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Правила дифференцирования

1) $(c\cdot f(x))' = c\cdot f(x),$ñ$- const$	$(6x^3)' = 6(x^3)' = 6\cdot 3x^2 = 18x^2$ $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = \dfrac{1}{3}(x^3)' = \dfrac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$
2) $(f(x) \pm g(x)' = f'(x) \pm g'(x)$	$(x^5 + Sinx - 7)' = 5x^4 + Cosx - 0 = 5x^4 + Cosx$
3) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	$(x^7 Sinx)' = (x^7)'Sinx + x^7(Sinx)' = 7x^6 Sinx + x^7 Cosx$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	$\left(\frac{Sinx}{x}\right)' = \frac{(Sinx)'\cdot x - Sinx\cdot(x)'}{x^2} = \frac{Cosx\cdot x - Sinx\cdot 1}{x^2} =$ $= \frac{xCosx - Sinx}{x^2}$

Производная сложной функции.

Сложная функция – это функция от функции: u=f(g(x))

Производная сложной функции u=f(g(x)) находится по формуле:

$$(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Правило дифференцирования сложной функции: *Производная сложной функции равна произведению производной функции, ее составляющих.*

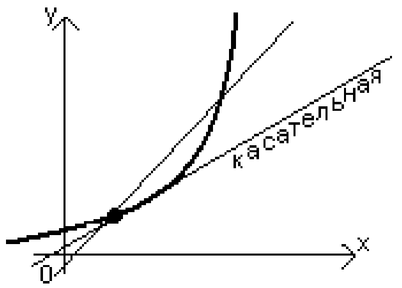
	Формулы	Примеры
1	$(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$((x^6-3x+2)^4)' = 4(x^6-3x+2)^3\cdot(x^6-3x+2)' = 4(x^6-3x+2)^3(6x^5-3)$
2	$(u^2)' = 2u\cdot u'$	$(Sin^2x)' = 2Sinx\cdot(Sinx)' = 2Sinx\cdot Cosx = Sin2x$
3	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$	$\left(\frac{1}{x^3+5x}\right)' = -\frac{1}{(x^3+5x)^2}\cdot(x^3+5x)' = -\frac{3x^2+5}{(x^3+5x)^2}$
4	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	$\left(\sqrt{7-5x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{7-5x}}\cdot(7-5x)' = \frac{-5}{2\sqrt{7-5x}}$
5	$(Sinx)' = Cosx\cdot x'$	$\left(Sin\left(7x-\frac{П}{12}\right)\right)' = Cos\left(7x-\frac{П}{12}\right)\cdot\left(7x-\frac{П}{12}\right)' = Cos\left(7x-\frac{П}{12}\right)\cdot 7 = 7Cos\left(7x-\frac{П}{12}\right)$
6	$(Cosx)' = -Sinx\cdot x'$	$\left(Cos\left(\frac{П}{4}-5x\right)\right)' = -Sin\left(\frac{П}{4}-5x\right)\cdot\left(\frac{П}{4}-5x\right)' = -Sin\left(\frac{П}{4}-5x\right)\cdot(-5) = 5Sin\left(\frac{П}{4}-5x\right)$
7	$(tgu)' = \frac{1}{Cos^2u}\cdot u'$	$\left(tg(1-x)\right)' = \frac{1}{Cos^2(1-x)}\cdot(1-x)' = \frac{1}{Cos^2(1-x)}\cdot(-1) = -\frac{1}{Cos^2(1-x)}$

8	$(ctgu)' = -\frac{1}{Sin^2 u} \cdot u'$	$\left((ctg\frac{x}{3}\right)' = -\frac{1}{Sin^2\frac{x}{3}} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' = -\frac{1}{Sin^2\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3Sin^2\frac{x}{3}}$
9	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$
10	$(a^u)' = u^4 \lambda na \cdot u'$	$(3^{5-7x})' = 3^{5-7x} \cdot \lambda n3 \cdot (5-7x)' = 3^{5-7x} \cdot \lambda n3 \cdot (-7) = -7\lambda n3 \cdot 3^{5-7x}$
11	$(\lambda nu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$\left(\lambda n(6-5x)\right)' = \frac{1}{6-5x} \cdot (6-5x)' = \frac{1}{6-5x} \cdot (-5) = \frac{-5}{6-5x}$
12	$(\lambda og_a u)' = \frac{1}{u\lambda na} \cdot u'$	$(\lambda gx^2)' = \frac{1}{x^2 \lambda n10} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{x^2\lambda n10} = \frac{2}{x\lambda n10}$

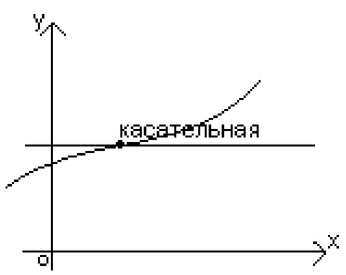
Тема: Уравнение касательной к графику функции.

Геометрический смысл производной.

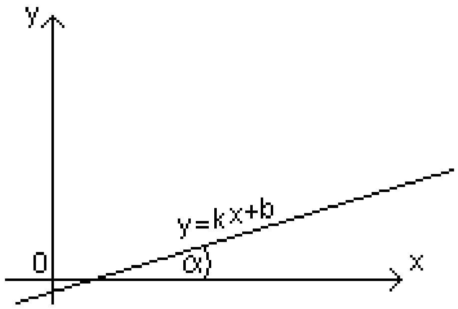
1. Определение касательной.



Касательная – это предельное положение секущей.



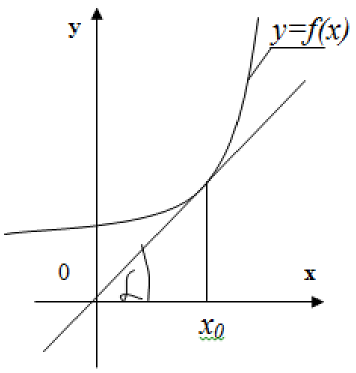
2. Угловой коэффициент прямой.



k - угловой коэффициент прямой.

k=tgα

3. Геометрический смысл производной.



$$\boxed{k = f'(x_0)} \qquad k = tg\alpha \qquad \boxed{tg\alpha = f'(x_0)}$$

4. Условие дифференцируемости функции.

Если функция дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке.

Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема.

<u>5.Уравнение касательной.</u>

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

<u>Алгоритм составления уравнения касательной:</u>

1. Обозначить абсциссу точки касания x_0.
2. Вычислить $f(x_0)$.
3. Найти $f'(x)$.
4. Вычислить $f'(x_0)$.

5. Подставить значения $f(x_0), f'(x_0), x_0$ в формулу.

Пример 1. Напишите уравнение касательной к графику функции

$y = x^2 + x + 4$ **в точке с абсциссой x = 1.**

Решение.

1. $x_0 = 1, \quad f(x) = x^2 + x + 4.$

2. $f(x_0) = 1^2 + 1 + 4 = 6.$

3. $f'(x) = (x^2 + x + 4)' = 2x + 1.$

4. $f'(x_0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$

5. $y = 6 + 3(x-1), y = 6 + 3x - 3, y = 3x + 3.$

Ответ: y = 3x + 3.

Пример 2. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции y = x^3 в точке с абсциссой x = 2.

Решение.

$f'(x) = (x^3)' = 3x^2; \quad f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12; \quad k = f'(2) = 12.$

Ответ: 1

Ход работы.

При вычислении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке находят:

1) производную $f'(x)$;
2) критические точки;
3) значения функции в критических точках и на концах отрезка;
4) наибольшее и наименьшее значения функции.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке [1; 3].

Решение:

1) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [1; 3].
   Находим $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
2) $f'(x) = 0$, $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x-2) = 0$, $x = 0$, $x = 2$.
   Критические точки $x = 0$, $x = 2$.
3) Отрезку [1;3] принадлежит лишь одна из этих критических точек, а именно $x = 2$. Вычислим значения функции $f(x)$ в точке $x = 2$ и на концах отрезка $x = 1$ и $x = 3$.
   $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0;$
   $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2;$
   $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 27 - 27 + 4 = 4.$

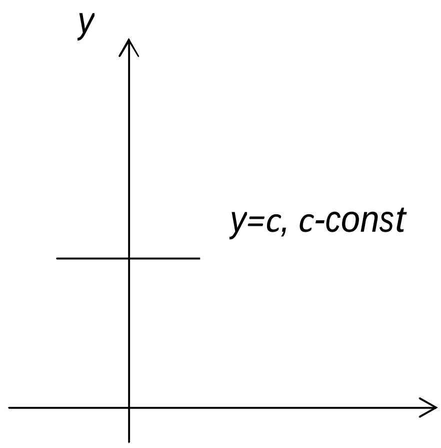
f(3)=4наибольшее

f(2)=0наибольшее

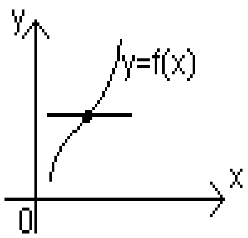
Тема: Исследование функций и построение графиков.

Применение производной к исследованию функций.

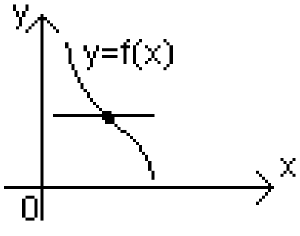
1. Исследование функций на монотонность.



функция возрастает,	функция убывает,	функция постоянна
α -острый угол (I четв.),	α -тупой угол (II четв.),	α =0,
$tg\alpha > 0,$	$tg\alpha < 0,$	$tg\alpha = 0,$
$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) = 0.$



T₁* *Если во всех точках открытого промежутка выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (уравнение $f'(x) = 0$ имеет конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ возрастает на этом промежутке.



T₂* *Если во всех точках открытого промежутка выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (уравнение $f'(x) = 0$ имеет конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ убывает на этом промежутке.

T₃* *Если во всех точках открытого промежутка выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на этом промежутке.

2.Точки экстремума функции.

x_1, x_3 – точки максимума,

x_2, x_4 – точки минимума.

Точки, в которых производная равна нулю называются **стационарными.**

Точки, в которых функция непрерывна, но производная не существует, называются **критическими.**

T_4 Если при переходе через стационарную или критическую точку x_0 производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума.

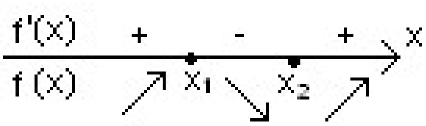
Если при переходе через стационарную или критическую точку x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума.

Если при переходе через стационарную или критическую точку x_0 знак производной не изменяется, то в точке x_0 экстремума нет.

3.Алгоритм исследования функции

на монотонность	**на экстремумы**
1. Найти область определения.	1. Найти область определения.
2. Установить дифференцируемость функции.	2. Установить дифференцируемость функции.
3. Найти производную $f'(x)$.	3. Найти производную $f'(x)$.
4. Найти стационарные и критические точки.	4. Найти стационарные и критические точки.
5. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на по-	5. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на

лучившихся интервалах.

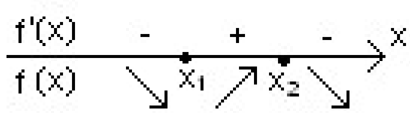


6. Сделать вывод о монотонности функции.

7. Присоединить стационарные и критические точки к интервалам.

8. Записать ответ.

получившихся интервалах.



6. Сделать вывод об экстремумах функции.

7. Записать ответ.

Схеме исследования функции:

1. Найти область определения функции D(f).
2. Вычислить производную $f'(x)$.
3. Найти стационарные точки $f'(x) = 0$.
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции (монотонность) Условия возрастания функции: $f'(x) > 0$. Условия убывания функции: $f'(x) < 0$.
5. Найти точки максимума и минимума функции.

Точка *max*: $f'(x)$ меняет знак с ”+” на “-” .

Точка min: $f'(x)$ меняет знак с “-” на “+” .

Точки экстремума – это точки максимума и минимума.

Экстремум функции – это значение функции в точках экстремума.

Данные исследования занести в таблицу и построить график.

x					
$f'(x)$					
$f(x)$					

Образец решения

Исследовать функцию и построить график: $f(x) = 2 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^5$.

Решение.

1. Найти область определения функции $D(f) = (-\infty; \infty)$.
2. Вычислить производную $f'(x) = (2 + 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^5)' = 15 \cdot x^2 - 15 \cdot x^4$.
3. Найти стационарные точки $f'(x) = 0$

$15 \cdot x^2 - 15 \cdot x^4 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (1 - x^2)$.

$x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, \qquad 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

0, 1, -1-стационарные точки.

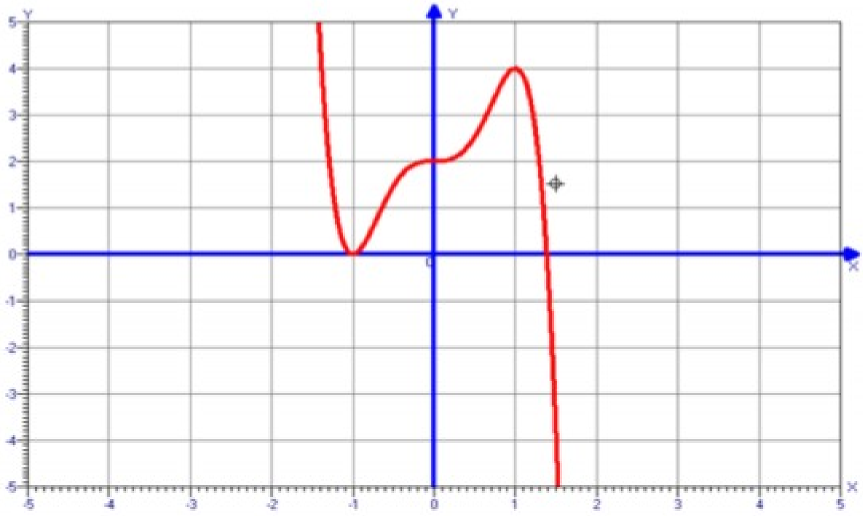
Данные вносим в таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	2	↗	4	↘
		min		перегиб		max	

$f(-1) = 2 + 5\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^5 = 2 - 5 + 3 = 0.$

$f(0) = 2 + 5\cdot 0^3 - 3\cdot 0^5 = 2$

$f(1) = 2 + 5\cdot 1^3 - 3\cdot 1^5 = 2 + 5 - 3 = 4$



Тема: Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.

Цели: На конкретных примерах научиться находить неопределенный и определенный интегралы различными способами, закрепить умения интегрировать функцию и вычислять площадь криволинейной трапеции, используя таблицу основных интегралов.

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$ 2. $\int dx = x + C$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$ 8. $\int tgxdx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$ 9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C$ 14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ 4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$ 5. $\int \cos xdx = \sin xdx$ 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	10. $\int e^x dx = e^x + C$ 11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Формула Ньютона-Лейбница

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример 1: Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x)dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3 dx - 3 \cdot \int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \cos x + C$$

Пример 2: Вычислите $\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2x}{x} dx - \int \frac{x^2}{x} dx = 3 \cdot \int \frac{dx}{x} + 2 \cdot \int dx - \int xdx = 3\ln x + 2x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + c$$

Пример 3. $\int (x+3)(x-2)dx$

Решение

$$\int (x+3)(x-2)dx = \int (x^2+x-6)dx == \int x^2dx + \int xdx - 6\int dx =$$
$$= \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$$

Пример 4. $\int \frac{(x+2)^3}{x}dx$

Решение

$$\int \frac{(x+2)^3}{x}dx = \int \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x}dx = \int (x^2+6x+12+\frac{8}{x})dx = \int x^2dx + 6\int xdx + 12\int dx + 8\int \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2} + 12x + 8\ln x + C = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x + 8\ln x + C$$

Для вычисления значения **определенного интеграла** используем **формулу Ньютона-Лейбница**. Берем неопределенный интеграл и находим любую первообразную, затем вычисляем разность ее значений, соответствующих верхнему и нижнему пределов.

Пример 5. $\int_2^3 x^2dx$

Решение

$$\int_2^3 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

Пример 6. $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1+\frac{1}{x^2})dx$

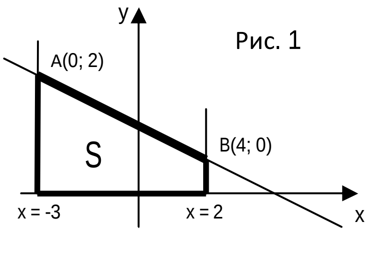
Решение

$$\int_{-1}^2 (x^2+2x+1+\frac{1}{x^2})dx = \int_{-1}^2 x^2dx + \int_{-1}^2 2x\cdot dx + \int_{-1}^2 dx + \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^2 + 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 + x\Big|_{-1}^2 + \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) + \left(2^2-(-1)^2\right) +$$
$$+ \left(2-(-1)\right) - \left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right) + (4-1) + 3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(-1)}\right) = 3+3+3+1{,}5 = 10{,}5$$

Пример 7. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями *y = -0,5x + 2, y = 0,*

x = -3 и *x = 2.*

Решение. Выполним построение фигуры. Строим прямую *y = - 0,5x + 2* по двум



точкам. Найдем эти точки. Пусть $x = 0$, тогда $y = 2$. Получили первую точку A(0; 2). Пусть y = 0, тогда $x = 4$. Получили вторую точку B(4; 0).

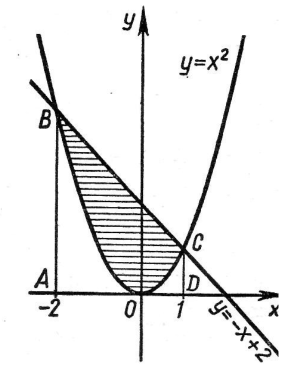
Т.о. f(x) = $-0{,}5x + 2$, $a = -3$, $b = 2$, находим площадь по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$:

$$S = \int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)dx = (-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-3}^{2} = \left(-\frac{1}{4}\cdot 2^2+2\cdot 2\right)-$$
$$-\left(-\frac{1}{4}\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\right) = -1+4-\left(-\frac{9}{4}-6\right) = 3+8{,}25 = 11{,}25$$

Ответ: S = 11, 25 (кв. ед.)

Пример 8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = -x + 2.$

Решение $S = S_{ABCD} - S_{ABOCD}$



Для нахождения пределов интегрирования решаем уравнение:

$x^2 = -x + 2,$

$x^2 + x - 2 = 0,$

$x_1 = -2,$

$x_2 = 1.$

Искомая площадь равна:

$$S = \int_{-2}^{1}(-x+2)dx - \int_{-2}^{1}x^2dx = (-\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-2}^{1} = (-\frac{1}{2}+2)-(-\frac{4}{2}-4)-\frac{1}{3}-\frac{8}{3} = 1{,}5+6-3 = 4{,}5$$

Задания к самостоятельной работе № 10

Критерии оценок:

Найти производную следующих функций:

<u>Задание на «3».</u>

1) y = x^2;
2) y = $2x^5$;
3) y = $2x^6 + 8x$;
4) y = $-6x^2 + 7x + 14$;
5) y = $-3x^2 + 4x^9 - x + 4$;
6) y = $2x^7 - 7x^5 + 9x - 1$

<u>Задание на «4:</u>

1) y = $5{,}6x^3 - 2x^{-3} + 4x$;
2) y = $-6x^{-8} + 9x - \frac{2}{3}x^6$;

3) y = $-\frac{2}{3}x^9 + 13x^6 + 12$;

4) y = $-3x^7 - \frac{1}{2}x^5 - 4\frac{2}{3}x^3 - 3$;

5) y = $7 - 9x^2 - 13x - 4x^3$;

6) y = $5x^{1/5} + 5{,}4x^2 + 2x - 9$

Задание на «5»:

1) y = $\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{8}x^2 + 3$;

2) y = $-2x^{-1/4} + 5$;

3) y = $0{,}5x^7 - \frac{3}{x^{-3}}$;

4) y = $\frac{-9}{x} + 7x - 2$;

5) y = $x^3 + 2\sqrt{x}$;

Найти производную следующих функций (сложная функция)

Задание на «3».

1. y = $(x - 2)^8$
2. y = $(x^2 + 2x)^3$
3. y = $(x + 3)^4$
4. y = 41^x
5. y = $(3 + 5x + x^3)^2$

Задание на «4:

1. y = $\sqrt{9x^2 + 5}$
2. y = $\ln(-5x^7 + 14x + 3)$
3. y = $(-2x^5 + 5)^{-3}$
4. y = $\sqrt{4 - 6x^2}$
5. y = $(-23)^x$

Задание на «5»:

1. y = $\left(\frac{1 + x^6}{x^2 - 6}\right)^3$
2. y = $-x^4\sqrt{-6x^3 - 3}$
3. y = $\sqrt{-3x^{-4} - 7x - 6}$
4. y = $\sqrt[3]{-5x^4 - 6x}$
5. y = $-6(-6x^{-3} - 6x + 2)^{1/6}$

Исследовать на экстремумы функции:

Задание на «3».

1) y = $x^2 + 5$;
2) y = $3x^2 - 6x$

Задание на «4:

1) y = $2x^3 - 6x + 84$;

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 9$

<u>Задание на «5»:</u>

1) $y = \frac{1}{3}x^3 – x^4 + 301$;

2) $y = \frac{x^3}{3x^2 - 1}$

Исследовать функцию и построить график.

<u>Задание на «3».</u>

1. Исследовать функцию и построить график : $y = 2x^3$
2. Исследовать функцию и построить график $y = x^3+6$

<u>Задание на «4:</u>

1. Исследовать функцию и построить график $y = 5x^3-2x^2+2x-10$
2 Исследовать функцию и построить график $y = 6x^3-6x^2+2x-1$

<u>Задание на «5»:</u>

1.Исследовать функцию и построить график $y = \frac{2}{x^2 - 2}$;

2. Исследовать функцию и построить график $y = \frac{x^2 + 6}{-3x}$

Найти первообразную следующих функций:

<u>Задание на «3».</u>

1) f (x) = -8;
2) f (x) = 7x;
3) f (x) = $2 – x^4$;
4) f (x) = $x^2 - 3x$;
5) f (x) = $x^7 – 8x^2 + 4x^2 + 10$;
6) f (x) = $-5x^3 + 2x^2 + 7x - 3$

<u>Задание на «4:</u>

1) f (x) = $\frac{1}{3}x^6 – x^4 - 5$;

2) f (x) = $-\frac{2}{3}x^5 + 9x^6 + 2x-4$;

3) f (x) = $\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x + 5$;

4) f (x) =-6 x + cos x;

5) f (x) = $-\frac{2}{5}x^3 + 3x^6 + 1$;

6) f (x) = $\frac{1}{3}x^3 - 3x^7 + 2$

<u>Задание на «5»:</u>

1)f (x) = $\frac{1}{x^2} + 2x-6$;

2)f (x) = $-8 - \frac{1}{x^4}$;

3)f (x) = 3 sin x;

4)f (x) = $47 - 3x^{-3} + \frac{1}{x^2}$;

5) f (x) = $5x^{-2} + 2x^{-3} + 11$;

6) f (x) = $\frac{1}{x^6} - 3\sin x$

Вычислить следующие интегралы:

<u>Задание на «3».</u> 1) $\int_1^2 3dx$; 2) $\int_0^1 x^3dx$; 3) $\int_3^4 2xdx$; 4) $\int_{-1}^1 2x^3dx$

<u>Задание на «4:</u> 1) $\int_1^2 (2x+1)dx$; 2) $\int_{-2}^2 (3x^2 - 3x + 6)dx$; 3) $\int_{-3}^0 (2x^3 - 4x)dx$; 4) $\int_3^4 (2-x)^5 dx$

<u>Задание на «5»:</u> 1) $\int_0^1 \sqrt{3x}dx$; 2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{4x^2}dx$; 3) $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1}dx$; 4) $\int_1^2 \frac{1}{(2x+6)^2}dx$.

Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

<u>Задание на «3».</u> y = $2x^2$, y = 0, x = 1, x = 2.

<u>Задание на «4:</u> y = $3x^2-4$, y = 0, x = -2, x = 1.

<u>Задание на «5»:</u> y =$2x^2+6x$, y = 0, x+1 = 0, x-2 = 0.

Самостоятельная работа №11 (8час)

Тема: Объем и площадь поверхности призм

Цели: закрепить навык решения практических задач на вычисление объёмов куба и прямоугольного параллелепипеда, закрепить навык решения практических задач на вычисление объёмов призмы, закрепить навык решения практических задач на вычисление тел вращения.

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал

Многогранники могут иметь самую различную форму. Среди них выделяют **параллелепипеды**. Обычный, всем известный кирпич с точки зрения геометрии является параллелепипедом. Форму параллелепипеда имеют многие предметы, с которыми мы встречаемся в жизни, например коробки, используемые для упаковки различных товаров.

- **У параллелепипеда 8 вершин, 12 ребер и 6 граней.**
- **Каждая грань параллелепипеда - прямоугольник.**
- **Противоположные грани параллелепипеда равны.**

Каждый параллелепипед имеет **три измерения: длину, ширину и высоту**. Среди всех параллелепипедов особую роль играет - куб.

Куб - это такой параллелепипед, у которого все ребра равны, поэтому все его грани - квадраты.

За единицу измерения объема принимается **объем единичного куба**, т.е. объем куба, длина ребра которого равна 1 единице длины.

1 кубический сантиметр (1 см^3) - объем куба, длина которого равна 1 см.
1 кубический дециметр (1 дм^3) - объем куба, длина которого равна 1 дм.
1 кубический метр (1 м^3) - объем куба, длина которого равна 1 м.

Теорема: объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями *a, b, c* вычисляется по формуле

$V = a \cdot b \cdot c$, $V = S_{осн} \cdot h$.

Теорема: объем наклонного (любого) параллелепипеда равен произведению площади основания *S* на высоту *h*:

$V = S \cdot h$.

Объем куба равен кубу (третьей степени) его ребра. $\mathbf{V = a^3}$

Пример 1. *Найдите объем параллелепипеда, измерения которого равны 6 мм, 10 мм и 15 мм.*

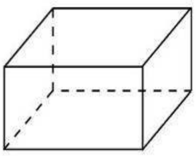
Решение: *6 х 10 х 15 = 900 (мм^3).*

Пример 2. *Найдите объем куба, ребро которого равно 5 дм.*

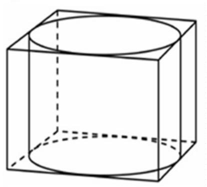
Решение: $5^3 = 5 x 5 x 5 = 125$ (*дм*^{3}).
Заметим, что единица объема, равная одному кубическому дециметру, имеет и другое название - **литр.** В литрах обычно измеряют объемы жидкостей и сыпучих веществ.

комнаты, если ее длина равна 6 м.
а) 432 м^3; *б*) 144 м^3; *в*) 48 м^3; *г*) другой ответ.

8. Найдите объем куба, если площадь его развертки равна 150 см^2.
а) 16 см^3; *б*) 125 см^3; *в*) 80 см^3; *г*) другой ответ.
9. Найдите ребро куба, если его объем равен 729 м^3.
а) 9 м; *б*) 8 м; *в*) 16 м; *г*) другой ответ.
10. Как изменится объем параллелепипеда, если его длину увеличить в 5 раза, ширину увеличить в 8 раз, а высоту уменьшить в 10 раз?
а) увеличится в 4 раза; *б*) уменьшится в 12 раз; *в*) не изменится; *г*) другой ответ.



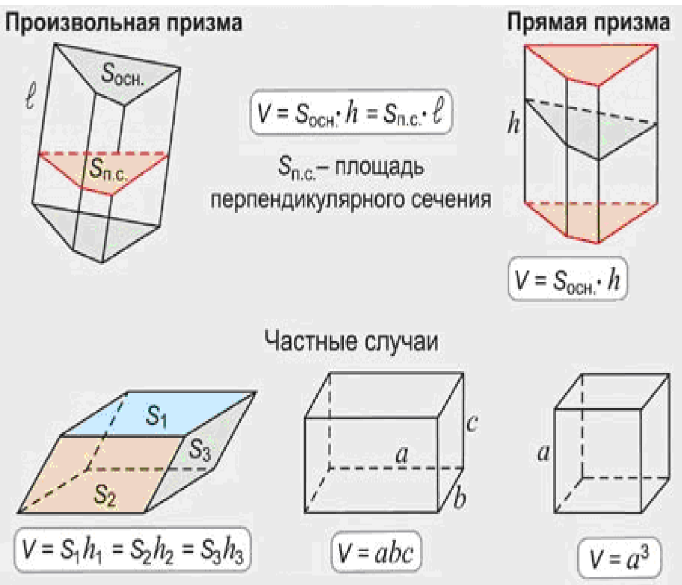
11. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 5. Найдите объем параллелепипеда.



12. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 1. Объем параллелепипеда равен 5. Найдите высоту

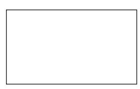
Объём призмы.

Призмой называется многогранник, две грани которого(основания) – равные *n* – угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные *n* граней (боковые грани) – параллелограмы.
Призма называется прямой, если все её боковые рёбра перпендикулярны основаниям.

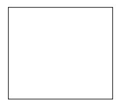


Призма называется правильной, если она прямая и её основания – правильные многоугольники.

Формулы для нахождения площадей фигур

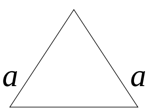


a **S = a · b** *a*

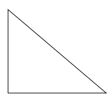


S = a^2

b *a*



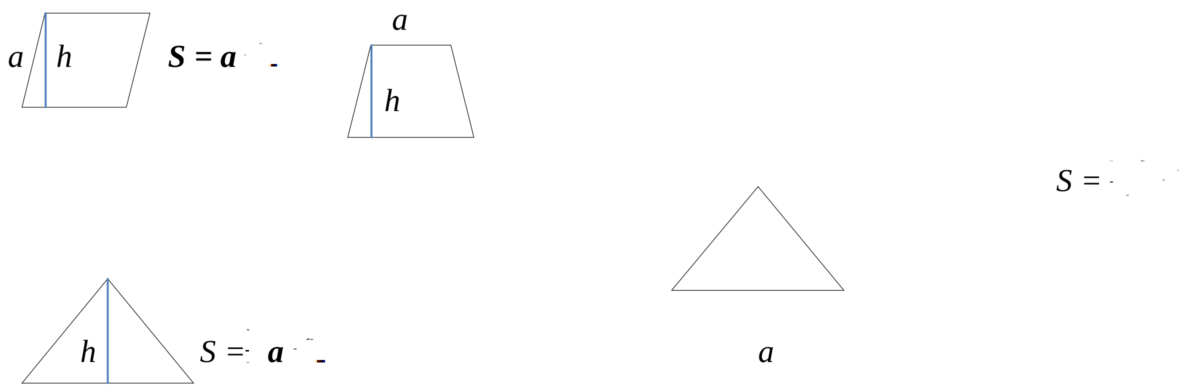
a *a* **S =**



a **S**

= **a**

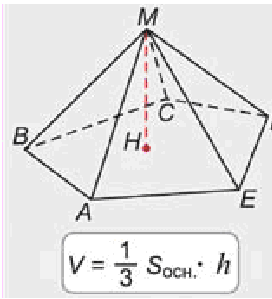
a *b*

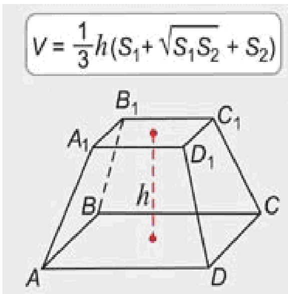


Тема: Объем и площадь поверхности пирамид

Пирамида - многогранник, состоящий из плоского *многоугольника*, *точки*, не лежащей в плоскости этого многоугольника и *всех отрезков*, соединяющих эту точку с точками многоугольника.

Данная точка называется *вершиной* пирамиды, а плоский многоугольник - основанием пирамиды. *Отрезки*, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются ***рёбрами***. **Высота** пирамиды - *перпендикуляр*, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания. ***Апофема*** - *высота боковой грани* правильной пирамиды. Пирамида, у которой *в основании* лежит правильный *n-угольник*, а *основание высоты* совпадает с *центром основания* называется ***правильной*** n-угольной пирамидой. ***Осью*** правильной пирамиды называется прямая, содержащая её высоту. Правильная треугольная пирамида называется тетраэдром. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной плоскости основания, то она отсечет пирамиду, *подобную* данной. Оставшаяся часть называется **усеченной пирамидой.**

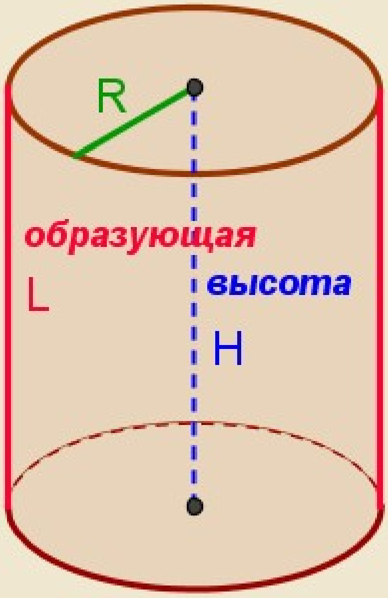




Тема: Объем и площадь поверхности тел вращения

Объём цилиндра.

Прямым круговым цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси содержащей одну из его сторон.



Боковая поверхность

$S_{бок} = 2\pi RH,$
где R- радиус круга, являющегося основанием,
H- высота цилиндра.

Полная поверхность

$S_{полн} = 2\pi R(R + H)$
$S_{ос.сеч.} = 2H \cdot R$

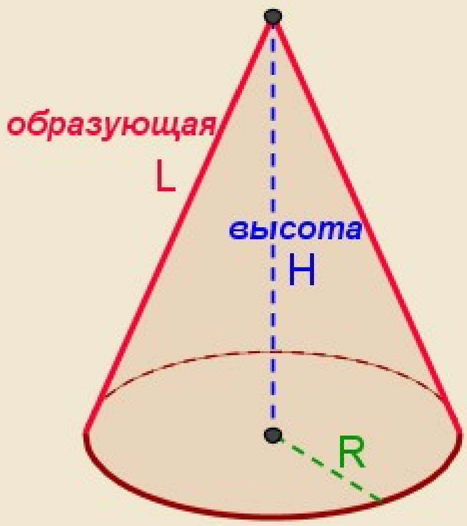
Объем

$V = \pi R^2 H = S_{осн} \cdot H$

высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в $см^3$.

Объём конуса.

Прямым круговым конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси содержащей один его катет.



Боковая поверхность

$S_{бок} = \pi RL,$
где R- радиус круга, являющегося основанием,
L- образующая конуса.

Полная поверхность

$S_{полн} = \pi R(R + L)$
$S_{ос. сеч.} = H$

Объем

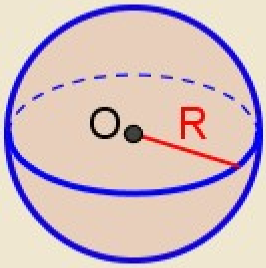
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

где H- высота конуса.

Объём шара.

Сферой называется множество точек пространства, находящихся на одинаковом расстоянии R, называемом ***радиусом*** сферы, от заданной точки O, называемой ***центром*** сферы.
Шаром называется множество точек пространства, находящихся от заданной точки O на расстоянии, не большем заданного расстояния R.



Площадь сферы

$$S = 4\pi R^2$$

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Части шара

Шаровой сектор	**Шаровой сегмент**
$S_{\text{полн}} = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$ $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$	$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$ $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$

Задачи для самостоятельного решения по теме: «Измерения в геометрии»

Решить задачи:

1. Три куба с ребрами 3 см, 4 см, 5 см переплавлены в один куб. Найти ребро этого куба.
2. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 м^3 на площадке размером 2,5 x 1,75 м, служащей для него дном. Найти высоту резервуара.
3. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м, 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.
4. В треугольной пирамиде со сторонами основания 5 см, 6 см, 7 см высота равна 3,5 см. Найти объем пирамиды.
5. В цилиндре с радиусом основания 3 м объем равен 10 м^3. Найти высоту цилиндра.
6. В цилиндре с диаметром 5 см высота равна 7,5 см. Найти объем цилиндра.
7. 25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найти диаметр проволоки (плотность меди 8,94 г/см^3).
8. Куча щебня имеет каноническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найти объем кучи щебня.

9. Сосновое бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42 см и 25 см. Чему равен объем бревна?
10. Усеченный конус имеет, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, и равновеликий цилиндр имеют одну и ту же высоту. Чему равен радиус основания этого цилиндра?
11. Требуется переплавить в один шара два чугунных шара с диаметрами 25 см и 35 см. Найти диаметр нового шара.
12. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. Найти объем равновеликого ему цилиндра.

Критерии оценки самостоятельной работы №3-2

Отметка	Количество задач, необходимое для получения отметки
« **5**» (отлично)	11-12
« **4**» (хорошо)	9-10
« **3**» (удовлетворительно)	8-7
« **2** « (неудовлетворительно)	менее 7

Самостоятельная работа №12 (6 час)

Тема: Решение задач по теории вероятностей

Цели: На конкретных примерах научиться решать практические задачи с применением вероятностных методов.

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.
Теоретический материал

Испытанием называется совокупность условий, при которых может произойти данное случайное событие.

Событие – это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет. События бывают достоверными, невозможными и случайными.

Достоверное событие – это событие, которое в результате испытания непременно должно произойти.(Например: выпадение от 1 до 6 очков при бросании игральной кости)

Невозможное событие – это событие, которое в результате испытания не может произойти.(Например: выпадение 7 очков при бросании игральной кости)

Случайное событие – это событие, которое в результате испытания может произойти или не произойти. (Например: выпадение от 1 до 6 очков при бросании игральной кости)

События называются ***несовместными***, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого. (Например: при бросании монеты выпадение одновременно орла и решки)

События называются ***совместными,*** если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого. (Например: при игре в карты появление валета и масти пик).

Для количественной оценки возможностей реализации события вводится понятие ***вероятности события*** – это число, характеризующее степень возможности появления событий при многократном повторении событий.

Вероятностью P(A) события A называется отношение числа благоприятствующих исходов m к общему числу n: $P(A) = \frac{m}{n}$.

1^0. *Теорема сложения вероятностей.*
Если события A и B несовместны, то P(A + B) = B(A) + P(B).

Если события A и B совместны, то P(A + B) = B(A) + P(B) – P(AB).

2^0. *Теорема умножения вероятностей.* Если события A и B независимы, то P(AB) = P(A) · P(B).

3^0. *Вероятность противоположного события* Ā вычисляется по формуле P(Ā) = 1 – P(A).

Ā – событие, противоположное событию A (читается «не A»)[событие, состоящее в ненаступлении события A]

Пример 1. В урне 10 белых, 5 красных и 5 зеленых шаров.
Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет цветным (не белым).

Решение.

Число исходов, благоприятствующих событию А, равно сумме красных и зеленых шаров: m = 10. Общее число равновозможных несовместных исходов равно общему числу шаров в урне: n = 20. Тогда :

P(A) = = =0,5.

Пример 2. Найти вероятность выпадения цифры 2 или 3 при бросании игральной кости.

Решение.

Событие А – выпадение цифры 2, вероятность этого события Р(А) = . Событие В(А) – вы- падение цифры 3, вероятность этого события Р(В) = . События несовместные, поэтому

Р(А + В) = Р(А) + Р(В) = + = = .

Пример 3. В билете 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов второго – 15, из 30 вопросов третьего – 10. Определить вероятность правильного ответа студента по билету.

Решение.

Учитывая, что ответ на каждые разделы есть независимые события А, В, С, а их вероятности соответственно равны: Р(А) = .

Тогда вероятность правильного ответа на билет Р(К) находим по формуле

Р(К) = Р(А) Р(В) Р(С) = =0,125.

Задачи для самостоятельного решения по теме: «Элементы теории вероятностей»

Задание№1

<u>Задание на «3».</u> Решить задачу. Из корзины, в которой находятся 9 красных, 8 желтых и 7 зеленых шаров, наудачу вынимается один. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется: а) красным, б) желтым; в) черным; г) зеленым.

<u>Задание на «4</u><u>:</u> Решить задачу. В корзине находятся 30 белых и 20 черных шаров. Наугад вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают его в сторону. Наугад вынимают еще один шар, который оказался черным, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Задание на «5»: Решить задачу. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются 2карты. Найти вероятность того, что это будут два туза.

Задание№2

Задание на «3». Решить задачу. В учебных мастерских техникума изготовляются детали на трех станках. Вероятность изготовления детали на первом станке равна 0,6. Вероятность появления годной детали на первом станке равна 0,8. Найти вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.

Задание на «4: Решить задачу. В корзине 4 белых и 3 черных шаров. Из корзины последовательно вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что второй шар окажется черным при условии, что первый шар был черным.

Задание на «5»: Решить задачу.

Решить задачу. В ящике находятся 7 деталей первого сорта, 5 второго сорта и 3 третьего сорта. Из ящика последовательно вынимают три детали. Найти вероятность того, первая наугад вынутая деталь окажется первого сорта (событие A_1), вторая – второго сорта (событие A_2) и третья деталь – третьего сорта (событие A_3).

Самостоятельная работа №13

Тема: «Использование графического метода решения уравнений и неравенств»

Цели: отрабатывать навыки использования графического метода при решении уравнений и неравенств

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы.

1. Рассмотрите теоретический материал и решение задач по теме. Сделайте необходимые записи в тетрадях.
2. Решите самостоятельно задачи. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал

Графический метод применяется в том случае, если в уравнении записаны функции разной природы (тригонометрическая и показательная, логарифмическая и линейная и т.д.). Идея графического метода решения уравнения ***f (x) = g(x),*** очень проста: нужно построить графики уравнений *y* = ***f (x)*** ***и*** ***y = g(x)*** и найти точки их пересечения.

1. Решение систем линейных уравнений графическим способом.

Для того, чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными, можно использовать графики уравнений.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$$

2x + 2y = 5

y = 2,5 – x

если x = 0, то y = 2,5 (0; 2,5)

если x = 1, то y = 1,5 (1; 1,5)

3x – y = -9

y = 9 + 3x

если x = -1, то y = 6 (-1; 6)

если x = -2, то y = 3 (-2; 3)

Ответ: А (-1,5;4) – решение системы

Тема: Решение систем уравнений (показательные системы уравнений, тригонометрические системы уравнений, логарифмические системы уравнений)

При решении систем уравнений, содержащих показательные функции, чаще всего используют традиционные методы решения систем уравнений: метод подстановки и метод замены переменных.

Напомним, что систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f1(x,y) = g1(x,y) \\ f2(x,y) = g2(x,y) \end{cases}$$

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют **систему уравнений**, если ставиться задача найти множество общих решений этих уравнений .

$$\begin{cases} f1(x,y) = g1(x,y) \\ f2(x,y) = g2(x,y) \end{cases}$$

Множество упорядоченных пар, точек (в случае систем с тремя переменными) и т.д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называется **решением системы уравнений.**

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Система называется **совместной,** если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной,** если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется **определенной,** если она имеет конечное число решений, и **неопределенной,** если она имеет бесчисленное множество решений.

Две системы называются **равносильными,** если они имеют одно и то же множество решений.

<u>Пример 1.</u>

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^x + 4^y = 5 \end{cases}$$

Решение:

Используем метод подстановки.

Из первого уравнения y=1-x подставим это выражение во второе уравнение:

$4^x + 4^{1-x} = 5;$

$4^x + \frac{4^1}{4^x} = 5$

Замена: $4^x = t, t > 0$

Получим уравнение:

$t + \frac{4}{t} = 5$ или

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$t_1 = 1, t_2 = 4$

Пример2

Обратная замена:

$4^x = 1$, тогда x=0, y=1

$4^x = 4$, x=1, y=0

Ответ: (0;1), (1;0)

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения выражаем y через x:

$$y = \pi - x,$$

и подставляем во второе уравнение:

$$\sin x + \sin(\pi - x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}.$$

Получилось простейшее тригонометрическое уравнение относительно x. Его решения запишем в виде двух серий:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Остаётся найти соответствующие значения y:

$$y_1 = \pi - x_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi n, \quad y_2 = \pi - x_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi n.$$

Как всегда в случае системы уравнений, ответ даётся в виде перечисления пар $(x; y)$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} - 2\pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Реши систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 90 \\ lg\ x + lg\ y = 3 \end{cases} \qquad \text{ОДЗ: } \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x - y = 90 \\ lg\ (x \cdot y) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 90 \\ lg\ (x \cdot y) = lg\ 1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 90 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

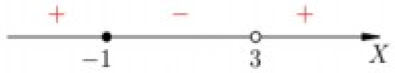
$$\begin{cases} x = 90 + y \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

Тема: Решение неравенств с помощью метода интервалов.

Теперь идём по оси X справа налево. Если $x > 3$, то оба выражения $x - 3$ и $x + 1$ положительны. Общий знак — плюс:

Перейдём в интервал $-1 < x < 3$. Выражение $x - 3$ поменяет знак и станет отрицательным, а выражение $x + 1$ по-прежнему положительно. Общий знак — минус:

На интервале $x < -1$ выражение $x - 3$ продолжает быть отрицательным; также отрицательным станет и $x + 1$. Общий знак — плюс:



Знак неравенства — «меньше или равно». Следовательно, решения неравенства расположены там, где стоит знак минус.

Задачи для самостоятельного решения по теме: «Уравнения и неравенства»

<u>Задание на «3».</u> Решить системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$

<u>Задание на «4».</u>

а)Решить систему линейных уравнений способом подстановки: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

б)Решить систему линейных уравнений способом сложения: $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 7x - 2y = 31 \end{cases}$

<u>Задание на «5»:</u>

а)Решить систему линейных уравнений способом подстановки: $\begin{cases} x - 2y + 9 = 0 \\ 3x - 2y - 25 = 0 \end{cases}$

б)Решить систему линейных уравнений способом сложения: $\begin{cases} y - x = 12 \\ 11x + 5y = 156 \end{cases}$

в)Решить систему линейных уравнений графическим способом: $\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$

Решить системы линейных неравенств:

<u>Задание на «3».</u>

1) $\begin{cases} 5 - 3x > 2x - 5 \\ 3x - 7 < 3 - 2x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 2 \geq 2x + 1 \\ 2x + 3 < 10 - 3x \end{cases}$

<u>Задание на «4».</u>

1) $\begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ \dfrac{1}{3}x < -1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 5(x - 2) - x > 2 \\ 1 - 3(x - 1) \leq 2 \end{cases}$;

<u>Задание на «5»:</u>

1) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x-2}{5} > 4 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{8} \le 6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \dfrac{5x+8}{3} - x \ge 2x \\ 1 - \dfrac{6-15x}{4} \ge x \end{cases}$;

Список литературы:

Основные источники:

М.И. Башмаков, - М. Издательский центр «Академия», 2012.задачник математика.

Дополнительные   источники:

1. А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа» - М. Мнемозина, 2004.
2. Л.С. Атанасян «Геометрия 10-11 класс» М. Мнемозина,2000.
3. Ш.А. Алимов «Алгебра и начала анализа» - М. Просвещение, 2003.
4. А.Н. Колмогоров «Алгебра и начала анализа» - М. Просвещение,1991.
5. А.В.Погорелов «Геометрия 10-11 класс» - М. Просвещение,1999.
6. А. В. Шабунин «Алгебра и начала анализа» 10-11кл. издательство «Мнемозина», 1998г.,   И.Л Бродский «Сборник текстовых задач по математике для профильных классов, издательство «Просвещение», 2004г.,
7. Г.И. Ковалева «тренировочные тематические задания для подготовки к ЕГЭ
8. Валуцэ И.И. и др. Математика для техникумов на базе средней школы: учеб. пособ. – М.: Наука, 1990
9. Гончарова Г.А., Мочалин А.А. Элементы дискретной математики: учеб. пособ.- М.: Форум: ИНФРА-М, 2003