

## Практическая работа по теме: «Преобразование тригонометрических выражений»

### Цель работы:

- 1) отработать навыки работы с таблицей значений тригонометрических функций;
- 2) закрепить навыки применения тригонометрических формул при вычислении значений тригонометрических функций и преобразовании выражений, содержащих тригонометрические функции.

Выполняя данную работу, студент *должен*

### *знать*:

- основные тригонометрические тождества;
- формулы сложения тригонометрических функций;
- формулы двойного аргумента;
- формулы приведения;
- формулы суммы, разности тригонометрических функций.

### *уметь*:

- различать тригонометрические формулы;
- применять тригонометрические формулы при преобразовании и вычислении значений выражений;

### Последовательность выполнения:

задания выполнять желательно в указанном порядке.

### Методические указания:

**ЗАДАНИЕ 1      Перевести из градусной меры в радианную, и из радианной в градусную меру.**

Использовать формулы:  $n^{\circ} = \frac{\pi n}{180^{\circ}} \text{ радиан}$ ;  $m \text{ радиан} = \frac{m \cdot 180^{\circ}}{\pi} \text{ градусов}$

**ЗАДАНИЕ 2      Найти значение выражения.**

При выполнении задания использовать тригонометрические формулы:

- основные тригонометрические тождества;
- формулы сложения тригонометрических функций;
- формулы двойного аргумента;
- формулы приведения;
- формулы суммы, разности тригонометрических функций.

**ЗАДАНИЕ 3      Вычислить значение каждой из тригонометрических функций.**

При выполнении задания использовать основное тригонометрическое тождество

**ЗАДАНИЕ 4      Упростить выражение.**

При выполнении задания использовать тригонометрические формулы:

- основные тригонометрические тождества;
- формулы сложения тригонометрических функций;
- формулы двойного аргумента;
- формулы приведения;

формулы суммы, разности тригонометрических функций.

## ЗАДАНИЯ 5 Упростить выражение.

При выполнении задания использовать тригонометрические формулы приведения.

**Теоретический материал:**

### Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

### Формулы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

### Формулы суммы и разности

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

### Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha; \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

	$0; 2\pi$ $0, 360^\circ$	$\pi/6$ $30^\circ$	$\pi/4$ $45^\circ$	$\pi/3$ $60^\circ$	$\pi/2$ $90^\circ$	$\pi$ $180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-

### Формулы приведения

Функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол  $\alpha$  является углом I четверти.

Для углов  $\pi \pm \alpha$  и  $2\pi \pm \alpha$  название исходной функции сохраняется. Для углов  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  и  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$  название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

Функция		$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Угол					
Градусы	Радианы	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$
$90^\circ - \varphi$	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$
$90^\circ + \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$
$180^\circ - \varphi$	$\pi - \varphi$	$\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$
$180^\circ + \varphi$	$\pi + \varphi$	$-\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$
$270^\circ - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$
$270^\circ + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$	$-\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$
$360^\circ - \varphi$	$2\pi - \varphi$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$
$360^\circ + \varphi$	$2\pi + \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$

**Критерии оценивания:**

**Критерии оценивания:**

На оценку «5» - выполнить все задания;

На оценку «4» - выполнить задания №1, №2(а,б,в); №3; №4(в, г); №5(б,в)

На оценку «3» - выполнить задания №1; №2(а,б,в); №3, №4(а,б), №5(а).

**Задания:**

**Вариант 1**

**1. Перевести:**

а) из градусной меры в радианную :  $348^{\circ}$ ;  $66^{\circ}$ ;  $200^{\circ}$ ;

б) из радианной меры в градусную:  $\frac{\pi}{9}$ ;  $\frac{5\pi}{3}$ ; 7.

**2. Найти значение выражения:**

а)  $3 \sin \frac{\pi}{6} + 5 \cos \frac{\pi}{3}$

б)  $\sin 69^{\circ} \cdot \cos 21^{\circ} + \sin 21^{\circ} \cdot \cos 69^{\circ}$

в)  $\frac{\sin 70^{\circ} + \sin 10^{\circ}}{\cos 70^{\circ} - \cos 10^{\circ}}$

\*г)  $2 \cos^2 15^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 15^{\circ}$

**3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если**

$$\sin \alpha = -\frac{5}{13} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

**4. Упростите выражение:**

а)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$

б)  $\sin(\alpha - 30^{\circ}) + \cos(60^{\circ} + \alpha)$

в)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

\*г)  $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2$ .

**5. Используя формулы приведения:**

Вычислить: а)  $\sin 300^{\circ}$ ; б)  $\sin 330^{\circ} + \operatorname{tg} 240^{\circ}$

Упростить выражение: в)  $\frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$ ; \* г)  $\operatorname{ctg} \frac{21\pi}{4} \cdot \cos \frac{11\pi}{3}$

## Вариант 2

### 1. Перевести:

а) из градусной меры в радианную  $128^{\circ}$ ;  $32^{\circ}$ ;  $100^{\circ}$ ;

б) из радианной меры в градусную:  $\frac{\pi}{7}$ ;  $\frac{3\pi}{8}$ ; 4.

### 2. Найдите значение выражения

а)  $\sin \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{4}$

б)  $\cos 69^{\circ} \cdot \cos 21^{\circ} - \sin 69^{\circ} \cdot \sin 21^{\circ}$

в)  $\frac{\sin 80^{\circ} + \sin 10^{\circ}}{\cos 80^{\circ} + \cos 10^{\circ}}$

\*2)  $\cos^2 22^{\circ} 30' - \sin^2 22^{\circ} 30'$

### 3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13} \quad \text{и} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

### 4. Упростите выражение:

а)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \sin^2 \beta$

б)  $\frac{\sin(45^{\circ} - \alpha)}{\cos(45^{\circ} + \alpha)}$

в)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

\*2)  $\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot (1 + \sin^2 \alpha)}$

### 5. Используя формулы приведения:

Вычислить: а)  $\cos 210^{\circ}$

б)  $\cos 315^{\circ} + \operatorname{ctg} 150^{\circ}$

Упростить выражение: в)  $\frac{\sin(2\pi - \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$ ; \* г)  $\sin \frac{23\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{19\pi}{6}$

### Вариант 3

#### 1. Перевести:

а) из градусной меры в радианную :  $560^{\circ}$ ;  $32^{\circ}$ ;  $100^{\circ}$ ;

б) из радианной меры в градусную:  $\frac{\pi}{10}$ ;  $\frac{9\pi}{8}$ ; 8.

#### 2. Найти значение выражения:

а)  $-4 \sin \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{6}$

б)  $\sin 80^{\circ} \cdot \cos 20^{\circ} - \cos 80^{\circ} \cdot \sin 20^{\circ}$

в)  $\frac{\cos 50^{\circ} - \cos 40^{\circ}}{\sin 50^{\circ} - \sin 40^{\circ}}$

г)  $\frac{\operatorname{tg} 10^{\circ} + \operatorname{tg} 35^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 10^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 35^{\circ}}$

#### 3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если

$$\cos \alpha = -0,8 \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

#### 4. Упростите выражение:

а)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$

б)  $\sin(\alpha - 60^{\circ}) + \cos(30^{\circ} + \alpha)$

в)  $\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$

\*г)  $(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$

#### 5. Вычислить при помощи формул приведения:

а)  $\sin 315^{\circ}$

б)  $\cos 420^{\circ} + \operatorname{ctg} 225^{\circ}$

Упростить выражение: в)  $\frac{\cos(\pi + \alpha) \cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha) \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ ; \* г)  $\sin \frac{7\pi}{2} \cdot \cos \frac{25\pi}{4}$

## Вариант 4

### 1. Перевести:

а) из градусной меры в радианную:  $48^{\circ}$ ;  $626^{\circ}$ ;  $250^{\circ}$ ;

б) из радианной меры в градусную:  $\frac{2\pi}{9}$ ;  $\frac{8\pi}{9}$ ; 5.

### 2. Найти значение выражения:

а)  $\sin \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{4}$

б)  $\cos 12^{\circ} \cdot \cos 48^{\circ} - \sin 12^{\circ} \cdot \sin 48^{\circ}$

в)  $\frac{\sin 105^{\circ} - \sin 15^{\circ}}{\cos 165^{\circ} - \cos 15^{\circ}}$

\*2)  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$

### 3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

### 4. Упростите выражение:

а)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$

б)  $\cos(\alpha + 45^{\circ}) - \sin(45^{\circ} + \alpha)$

в)  $\frac{-\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

\*2)  $\frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$

### 5. Вычислить при помощи формул приведения:

а)  $\cos 510^{\circ}$

б)  $\operatorname{ctg} 600^{\circ} + \sin 480^{\circ}$

\*в)  $\operatorname{tg} \frac{43\pi}{6} \cdot \cos \frac{28\pi}{3}$

## Практическая работа № 6

### Тема: «Тригонометрические уравнения»

**Цель работы:** 1) закрепить навыки решения тригонометрических уравнений и неравенств методами:

- метод замены переменной;
- метод решения простейших тригонометрических уравнений ;
- метод сведения путем преобразований к простейшим тригонометрическим уравнениям;
- метод решения однородных тригонометрических уравнений;
- метод решения простейших тригонометрических неравенств.

Выполняя данную работу, студент *должен*

**знать:**

- формулы решений простейших тригонометрических уравнений;
- основные тригонометрические тождества;
- основные методы решения уравнений и неравенств.

**уметь:**

- вычислять значения тригонометрических функций;
- выполнять действия на преобразования тригонометрических уравнений;
- применять методы решения уравнений и неравенств.

**Последовательность выполнения:**

задания выполнять желательнo в указанном порядке.

**Методические указания:**

**ЗАДАНИЕ 1     Решите уравнения.**

При решении уравнений используйте формулы простейших тригонометрических уравнений.

**ЗАДАНИЕ 2     Решите уравнения методом подстановки переменной.**

При решении уравнений используйте метод подстановки переменной, основное тригонометрическое тождество.

**ЗАДАНИЕ 3     Решите уравнения, используя формулы тригонометрии.**

При решении уравнений воспользоваться основными тригонометрическими формулами

**ЗАДАНИЕ 4     Решите однородные уравнения.**

- при решении однородных уравнений первой степени, выполните деление на одну из тригонометрических функций ( $\sin x$  или  $\cos x$ );
- при решении однородных уравнений второй степени, выполните деление на одну из тригонометрических функций ( $\sin^2 x$  или  $\cos^2 x$ );

**ЗАДАНИЯ 5     Решите неравенства.**

При решении неравенств воспользоваться единичной окружностью.

**Критерии оценивания:**

**Критерии оценивания:**

На оценку «5» - выполнить все задания;

На оценку «4» - выполнить задания №1, №2; №3(а,б,в); № 4(а,б); №5 (а);

На оценку «3» - выполнить задания №1; №2; №3(а,б), № 4(а).

**Задания:****1 вариант.****1. Решите уравнения:**

а)  $\cos x = \frac{1}{2}$

б)  $\sin \frac{x}{2} = -1$

в)  $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

г)  $\operatorname{tg} (2x - \frac{\pi}{4}) = 1$

**2. Решите уравнения методом замены:**

а)  $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$

б)  $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$

**3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:**

а)  $5 \sin x + 3 \sin 2x = 0$

б)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

в)  $2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 1$

г)  $\sin(\frac{\pi}{6} + x) - \sin(\frac{\pi}{6} - x) = 1$

**4. Решите однородные уравнения:**

а)  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

б)  $\sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = 0$

**5. Решите неравенства:**

а)  $\sin x \leq \frac{1}{2};$

б)  $\operatorname{tg} 2x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**2 вариант****1. Решите уравнения:**

а)  $\sin x = \frac{1}{2}$

б)  $\cos \frac{x}{2} = -1$

в)  $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

г)  $\operatorname{ctg} (2x + \frac{\pi}{4}) = -1$

**2. Решите уравнения методом замены:**

а)  $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$

б)  $-2 \sin^2 x + 5 \cos x + 4 = 0$

**3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:**

а)  $7 \cos x - 4 \sin 2x = 0$

б)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

в)  $2 \sin 3x \cdot \cos 3x = -\frac{1}{2}$

г)  $\sin 2x \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \cos 2x \cdot \sin(x - \frac{\pi}{3}) = 0$

**4. Решите однородные уравнения:**

а)  $\sin x - \cos x = 0$

б)  $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$

**5. Решите неравенства:**

а)  $\cos x \leq -\frac{1}{2};$

б)  $\operatorname{ctg} 3x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

**3 вариант****1. Решите уравнения:**

$$a) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$б) \sin \frac{x}{2} = 1$$

$$в) \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$г) \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$$

**2. Решите уравнения методом замены:**

$$a) 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$б) -2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$$

**3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:**

$$a) \sin 2x - \cos x = 0$$

$$б) \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$в) \cos 2x - \cos 6x = 0$$

$$г) 4\sin 2x - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 5$$

**4. Решите однородные уравнения:**

$$a) \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

$$* б) 4\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x - 6\cos^2 x = 0$$

**5. Решите неравенства:**

$$a) \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$б) \operatorname{tg} x \leq -1$$

## 4 вариант

**1. Решите уравнения:**

$$a) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$б) \cos \frac{x}{2} = -1$$

$$в) \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$г) \operatorname{tg} \left( 0,5x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$$

**2. Решите уравнения методом замены:**

$$a) 2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$$

$$б) -2\sin^2 x + 5\cos x + 4 = 0$$

**3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:**

$$a) \cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$б) \sin x + \sin 3x = 0$$

$$в) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 17$$

$$г) \cos x - 4\sin 2x = 0$$

**4. Решите однородные уравнения:**

$$a) \sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$* б) 3\sin^2 x - 7\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

**5. Решите неравенства:**

$$a) \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$б) \operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$$

