Государственное автономное профессиональное
образовательное учреждение Иркутской области
«Байкальский техникум отраслевых технологий и сервиса»

Утверждаю
Директор ГАПОУ БТОТиС
____________ М.Н. Каурцев
Приказ 139 – ОД от 07.09.2020 г.

Учебно-методическое пособие по выполнению внеаудиторных домашних контрольных работ для студентов заочной формы получения образования

учебной дисциплины Математика

основной профессиональной образовательной программы

по специальности СПО

46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

по программе базовой подготовки

Байкальск - 2020 г.

Учебно-методическое пособие по выполнению внеаудиторных домашних контрольных работ для студентов заочной формы получения образования разработано на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности СПО **46.02.01 Документационное обеспечение и архивоведение.**

Организация-разработчик: *ГАПОУ БТОТиС*

Разработчик*:* *С.И. Константинова, преподаватель ГАПОУ БТОТиС*

Рабочая программа одобрена ЦК общеобразовательного блока ГАПОУ БТОТиС протокол № 1 «31»августа 2021 г.

Содержание

1. Введение 4

2. Содержание курса 6

3. Справочные материалы с примерами решений типовых задач …. 8

2. Контрольные задания... 51

3. Перечень учебных изданий, интернет - ресурсов,
дополнительной литературы 71

Введение

Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников, обучающихся по специальности Документационное обеспечение управления и архивоведения. Методические указания включают справочные материалы, перечень учебных изданий, интернет-ресурсов, дополнительной литературы, примеры решения контрольных заданий, варианты контрольных заданий, детально разобранные типовые задачи. Основное назначение пособия - помочь студенту самостоятельно изучить приёмы решения задач, и эффективно выполнить контрольную работу.

Заочная форма обучения предполагает самостоятельную работу студента над учебным материалом: поиск, анализ и оценка информации по содержанию учебного материала, решение задач, выполнение контрольных заданий. Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса "Математика", используя учебные издания, интернет-ресурсы, дополнительную литературу. Список рекомендуемой литературы приведен в методических указаниях. Студент может использовать также учебники и учебные пособия, не включенные в данный список, если эти пособия содержат соответствующие разделы учебного курса. Однако, в случае возникновения затруднений при самостоятельном изучении материала, студент может обратиться к преподавателю математики для получения устной консультации.

Студенты-заочники, обучающиеся по специальности Документационное обеспечение управления и архивоведения первого года обучения и выполняют одну контрольную работу, которая состоит из заданий части 1 и части 2.

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради в клетку, на титульном листе которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, курс, специальность, домашний адрес студента.
2. Задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением задачи надо полностью переписать ее условие.

3. Ход решения каждой задачи студент обязан оформить аккуратно, в полном соответствии с порядком решения типичной задачи, приведенной в данных методических указаниях.

4. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

5.

1	А	П
2	Б	Р
3	В	С
4	Г	Т
5	Д	У
6	Е	Ф
7	Ж,З	Х
8	И,К	Ц, Ч
9	Л,М	Ш,Э
10	Н, О	Ю,Я

Контрольная работа выполняется самостоятельно.

6. В случае незачета по контрольной работе студент обязан в кратчайший срок исправить все отмеченные ошибки и предоставить работу на повторную проверку.

7. Студент выполняет тот вариант, который совпадает с цифрой его учебного шифра в соответствии с таблицей.

Содержание курса

Наименование тем	Содержание учебного материала
Комплексные числа.	Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах. Показательная форма записи комплексного числа. Формула Эйлера.
Основы дискретной математики.	Множество и его элементы. Пустое множество, подмножества некоторого множества. Операции над множествами: пересечение множеств, объединение множеств, дополнение множеств. Отношения, их виды и свойства. Диаграмма Эйлер-Венна. Числовые множества. История возникновения понятия «граф». Задачи, приводящие к понятию графа.
Дифференциальное и интегральное исчисление.	Производная функции. Геометрический и физический смысл производной функции. Приложения производной. Интегрирование функций. Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определённого интеграла.
Обыкновенные дифференциальные уравнения.	Дифференциальные уравнения первого и второго порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
Дифференциальные уравнения в частных производных.	Дифференциальные уравнения в частных производных.
Ряды.	Числовые ряды. Признак сходимости числового ряда по Даламберу. Разложение подынтегральной функции в ряд. Степенные ряды

	Маклорена.
Элементы теории вероятностей и математической статистики.	Комбинаторика. Факториал числа. Виды соединений: размещения, перестановки, сочетания и их свойства. Случайный эксперимент, элементарные исходы, события. Определение вероятности: классическое, статистическое, геометрическое, условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Бернулли. Случайные величины, законы их распределения и числовые характеристики. Математическое ожидание и дисперсия.
Численное интегрирование	Понятие о численном интегрировании. Формулы численного интегрирования: прямоугольника и трапеций. Формула Симпсона. Абсолютная погрешность при численном интегрировании.
Численное дифференцирование	Понятие о численном дифференцировании. Формулы приближённого дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона
Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	Понятие о численном решении дифференциальных уравнений. Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Справочные материалы.

Тема 1. Комплексные числа.

⇒ *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x;y)$, первое из которых x называется его *действительной частью*, а второе число y — *мнимой частью*. Обозначение: $z = x+iy$.Символ i называется *мнимой единицей*.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$.

⇒ Два комплексных числа $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются *сопряженными*.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой* $M(x;y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот.

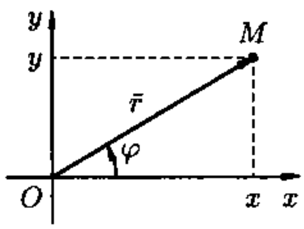

Рис. 112

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают $\mathbb{C}$). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой*.

Комплексное число $z = x+iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x;y)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z (см. рис. 112), называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.1}$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm, 2, \ldots$, где $\arg z = \varphi$ — *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi;\pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку $[0;2\pi)$.

$\Rightarrow$ Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.2}$$

называется *тригонометрической формой*.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{при } x > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

$\Rightarrow$ Запись числа z в виде

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{или} \quad z = |z|e^{i\arg z} \tag{1.4}$$

называют *показательной формой* (или экспоненциальной) комплексного числа.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$ формула Эйлера (1.5)

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные *в алгебраической форме*, определяются следующими равенствами:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{2.1}$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{2.2}$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2), \tag{2.3}$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{2.4}$$

$$(\text{при } z_2 \neq 0).$$

Из равенства (2.2) следует, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}, \tag{2.5}$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Из равенства (2.3) следует, что

$$i^2 = -1.$$

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{2.6}$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big),$$

$$\text{где } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n-1. \quad (2.7)$$

Пример 1.

Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$; **б)** $z = -1 + i\sqrt{3}$;

в) $z = -5i$; **г)** $z = -3 - 2i$;

д) $z = -3\Big(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\Big)$.

❍ Используем формулы (1.1)–(1.4).

а) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

б) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{3}}{-1}\Big) + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Значит,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\Big(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\Big) = 2e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}.$$

в) Имеем: $r = \sqrt{0 + 25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

г) Имеем: $r = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\Big(\frac{-2}{-3}\Big) - \pi = \operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi$. Значит,

$$-3 - 2i = \sqrt{13}\Big(\cos\Big(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\Big) + i\sin\Big(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\Big)\Big) = \sqrt{13}e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)}.$$

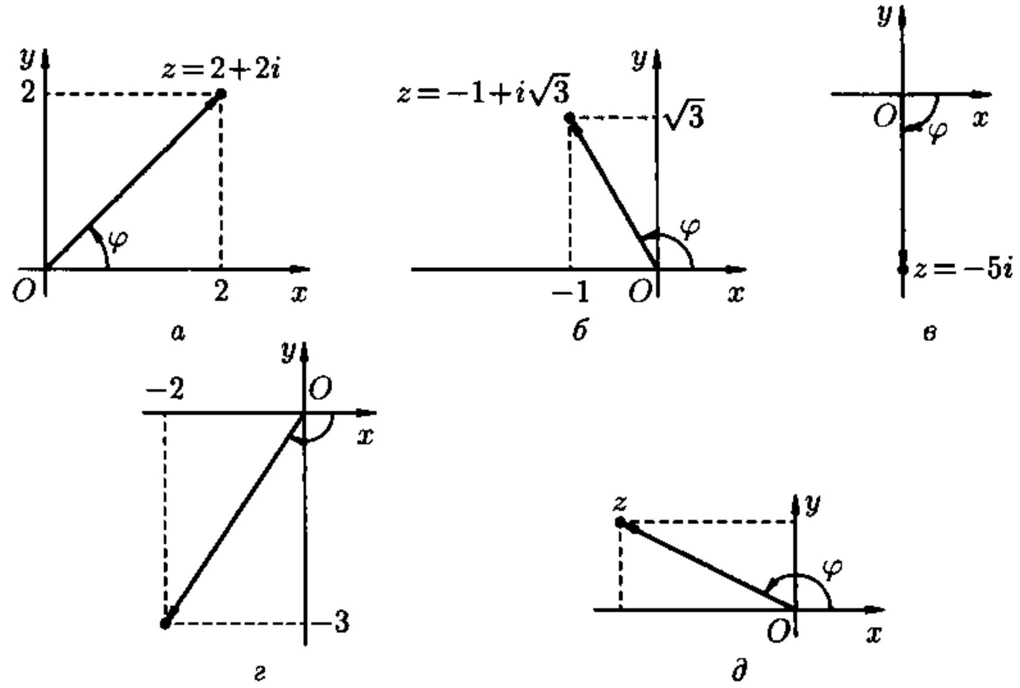

Рис. 113

д) Запись $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа (см. формулу (1.2)).

Перепишем z в виде $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Надо найти такой угол φ, что $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$. Таким углом

является $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, т.е. $\varphi = \frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z = 3\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right) = 3\cdot e^{i\cdot\frac{4}{5}\pi}.$$

Пример 2.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

❍ Используя формулы (2.1)–(2.4), находим:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i;$$
$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)\cdot(2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$ ●

Пример 3.

Найти $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$.

Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме: $|z| = r = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg z = \varphi = \operatorname{tg}\dfrac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = -\dfrac{2}{3}\pi$, т. е.

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$

По формуле Муавра (2.6) имеем

$$(-1 - i\sqrt{3})^{15} = \left[2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]^{15} =$$
$$= 2^{15} \cdot (\cos(-10\pi) + i\sin(-10\pi)) = 2^{15}(1 + 0i) = 2^{15} = 32768.$$

Тема. Основы дискретной математики.

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве рыб в Черном море, о множестве корней уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$, о множестве всех натуральных чисел и т. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \,\overline{\in}\, X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A = \{1, 3, 15\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1, 3 и 15; запись $A = \{x : \ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так $A \subset B$ («A включено в B») или $B \supset A$ («множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : \ x \in A$ или $x \in B\}$.

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать *некоторые* простейшие логические символы:

$\alpha \implies \beta$ означает «из предложения α *следует* предложение β»;

$\alpha \iff \beta$ «предложения α и β равносильны», т. е. из α следует β и из β следует α;

$\forall$ — означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ «существует», «найдется»;

$:$ «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$ «соответствие»

Например: 1) запись $\forall x \in A : \alpha$ означает: «для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α»;

2) $(x \in A \cup B) \iff (x \in A$ или $x \in B)$; эта запись определяет объединение множеств A и B.

Числовые множества.

Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми***. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}$ множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ - множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество $\mathbb{R}$ содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0{,}5\ (= 0{,}500\ldots)$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ — рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются ***иррациональными***.

Числовые промежутки.

Пусть a и b — действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a;b] = \{x : \ a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a;b) = \{x : \ a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

$[a;b) = \{x : \ a \leqslant x < b\}$;

$(a;b] = \{x : \ a < x \leqslant b\}$ — полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty; b] = \{x : x \leqslant b\}$; $[a, +\infty) = \{x : x \geqslant a\}$;
$(-\infty; b) = \{x : x < b\}$; $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$;
$(-\infty, \infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ бесконечные интервалы (промежутки).

Числа a и b называются соответственно левым и правым *концами* этих промежутков. Символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа, это символическое обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси от начала 0 влево и вправо.

Разностью двух множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов А, не входящих в В (обозначается А \ В).
Между множествами А и В установлено взаимно-однозначное соответствие если каждому элементу а из А поставлен в соответствие один элемент в из В, и при этом соответствии каждый элемент в из В соответствует одному и только одному элементу а из А.
Пример 5. Даны два множества:
А = {6 к + 5: к = 0. 1, 2, …} и В = {3m + 2: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) А UВ
б) А∩ В
в) В \ А.
Установите, является ли соответствие f : А→В, заданное формулой $y = \frac{x+5}{2}$ взаимно-однозначным?
Решение:

№ п\п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму.
1.	Определить, какие элементы принадлежат множеству, а какие – нет.	Множеству А принадлежат числа 5,11, 17, 23, 29, .. и не принадлежат числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … Множеству В принадлежат числа 2,5, 8, 11, 14, 17, … и не принадлежит числа 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, …
2.	Найти объединение, пересечение, разность множеств.	А UВ= В А∩ В = А В \ А = {2, 8,14, 20, …}. Это множество можно задать в виде {6 к + 2: к = 0. 1, 2, …}.
3.	Установить, является ли соответствие множеств. взаимно-однозначным.	Соответствие $y = \frac{x+5}{2}$ не является взаимно-однозначным, так как имеются элементы множества В, например 2, которым не соответствует ни один элемент множества А.

Ответ: а) А UВ= В; б) А∩ В = А; в) В \ А ={6 к + 2: к = 0. 1, 2, …}.

Соответствие не является взаимно-однозначным.

Тема. Дифференциальное и интегральное исчисление.

п.1. Производная.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования. Обозначим через C постоянную, x — аргумент, u, v, w — функции от x, имеющие производные.

Производная алгебраической суммы функций:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

Производная произведения двух функций:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Производная произведения постоянной на функцию:

$$(Cu)' = Cu'.$$

Производная частного (дроби):

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Частные случаи:

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'; \qquad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}v'.$$

Сложная функция. Производная сложной функции. Если y есть функция от u: $y = f(u)$, где u, в свою очередь, есть функция от аргумента x: $u = \varphi(x)$, т. е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется ***сложной функцией*** от x (функцией от функции):

$$y = f[\varphi(x)].$$

Производная сложной функции равна ее производной по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

или

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x).$$

Таблица производных

Производные элементарных функций	Производные сложных функций
$C'=0$, $x'=1$; $(kx+b)'=k$;	$(ku+b)'=k\cdot u'$;
$(x^n)'=nx^{n-1}$;	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$;
$(e^x)'=e^x$;	$(e^u)'=e^u\cdot u'$;
$(a^x)'=a^x\ln a$;	$(a^u)'=a^u\ln a u'$;
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$;	$(\ln u)'=\frac{1}{u}u'$;
$(\lg x)'=\frac{1}{x}\lg e$; $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$;	$(\lg u)'=\frac{1}{u}\lg e u'$; $(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}$;
$(\sin x)'=\cos x$; $(\cos x)'=-\sin x$;	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

Производные элементарных функций	Производные сложных функций
	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;
$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;	$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$;
$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;	$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$;
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}$;
$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$;
$(x^x)'=x^x(1+\ln x)$;	$(u^u)'=u^u(1+\ln u)u'$.

Пример 6.

Пользуясь определением, найти производную функции $y=f(x)$:
1) $y = 3x^2$;
2) $y = \sin x$.

Решение:

1. $y' = (3x^2)' = 6x$.
2. $y' = (\sin x)' = \cos x$.

Пример 7.

Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - 5^{x+1}$;
2) $f(x) = (x^4 - x) \cdot (3\operatorname{tg} x - 1)$.

○ 1) Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = 9 \cdot x^{-2/3} - 5 \cdot 5^x.$$

Отсюда, используя таблицу производных, получим

$$f'(x) = (9 \cdot x^{-2/3} - 5 \cdot 5^x)' = (9 \cdot x^{-2/3})' - (5 \cdot 5^x)' =$$
$$= 9 \cdot (x^{-2/3})' - 5 \cdot (5^x)' = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} - 5 \cdot 5^x \ln 5 =$$
$$= -6x^{-5/3} - 5^{x+1} \ln 5.$$

2) Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$f'(x) = \left[(x^4 - x)(3\operatorname{tg} x - 1)\right]' =$$
$$= (x^4 - x)'(3\operatorname{tg} x - 1) + (x^4 - x)(3\operatorname{tg} x - 1)' =$$
$$= (4x^3 - 1)(3\operatorname{tg} x - 1) + (x^4 - x) \cdot \frac{3}{\cos^2 x}. \quad ●$$

Пример 8.

Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции y:
1) $y = \sin^2 x$;
2) $y = \ln(\operatorname{arctg} 3x)$.

1) Данная функция является композицией двух имеющих производные функций $u = \sin x$ и $f(u) = u^2$. Так как $u' = \cos x$, а $f'(u) = 2u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:

$$y'(x) = (u^2)'_x = 2u \cdot u' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

2) Функция $\ln(\operatorname{arctg} 3x)$ — композиция функций $u = \operatorname{arctg} 3x$ и $f(u) = \ln u$, откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)'.$$

Функция $\operatorname{arctg} 3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v = 3x$ и $g(v) = \operatorname{arctg} v$, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(\operatorname{arctg} 3x)' = (\operatorname{arctg} v)'_x = \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)\operatorname{arctg} 3x}.$$ ●

Пример 9.

Вычислить $f'(-2)$, если $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 + 7x - 17$.

▶ $f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^5\right)' - (3x^3)' + (7x)' - (17)' = \frac{1}{4}(x^5)' -$

$- 3(x^3)' + 7(x)' = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 + 7,$

$f'(-2) = \frac{5}{4}(-2)^4 - 9(-2)^2 + 7 = -9.$ ◁

п.2 Механический и геометрический смысл производной.

1. Если при прямолинейном движении путь s, пройденный точкой, есть функция от времени t, т. е. $s = f(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т. е. $v(t) = f'(t)$.

Этот факт выражает **механический смысл производной**.

2. Если в точке x_0 к графику функции $y = f(x)$ проведена касательная, то число $f'(x_0)$ есть тангенс угла α между этой касательной и положительным направлением оси Ox, т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Этот угол называют **углом наклона касательной**.

Данный факт выражает **геометрический смысл производной**.

Механический смысл производной

Если точка движется вдоль оси Ox и ее координата изменяется по закону $x = x(t)$, то мгновенная скорость точки

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

а ускорение

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

Геометрический смысл производной

Пусть задана функция $y = f(x)$, которая имеет производную в точке $x = a$. Проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ через точку $(a;\ f(a))$, тогда угловой коэффициент или тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox будет равен производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(a)$.

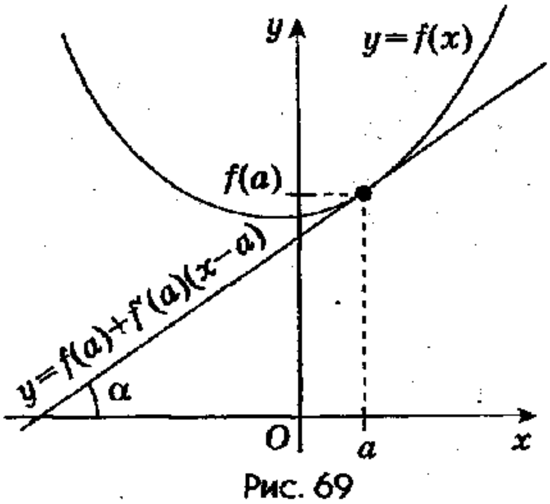

Рис. 69

Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке: $f'(a) = k = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 69).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x - a).$$

п.3 Геометрическое приложение производной.

Пример 10.

Найти угол наклона параболы $y = x^2 - x + 1$ к оси Ox в точке $x_1 = -1$.

РЕШЕНИЕ. Для вычисления угла наклона кривой найдем $y'(x_1)$: $y' = 2x - 1$; $y'(x_1) = -3$; $k = \operatorname{tg}\alpha = -3$. По таблице определяем $\alpha = 108°26'$.

Пример 11.

Найти координаты точки A, в которой касательная к параболе $y = x^2 - x - 12$ образует угол в 45° с осью Ox.

РЕШЕНИЕ. Находим тангенс угла наклона касательной, проведенной в искомой точке к оси Ox:

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = (x^2 - x - 12)' = 2x - 1.$$

По условию угол α равен 45°, следовательно, $\operatorname{tg} 45° = 1 = 2x - 1$, поэтому $x = 1$. Находим ординату искомой точки: $y(1) = 1^2 - 1 - 12 = -12$. Таким образом, координаты точки A: $(1; -12)$.

Пример 12.

Найти, под каким углом ось Ox пересекает параболу $y = x^2 + x$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение оси Ox: $y = 0$. Поэтому решим систему

$$\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Корни этой системы $x_1 = -1$; $x_2 = 0$. Парабола пересекает ось Ox в точках $A(-1; 0)$; $B(0; 0;)$.

Находим угловые коэффициенты касательных к параболе в точках A и B:

$$y' = (x^2 + x)' = 2x + 1; \; k_{x=-1} = 2(-1) + 1 = -1; \; k_{x=0} = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Вычислим углы α_1 и α_2, образуемые касательными к параболе с осью Ox в точках A и B:

$$k_{x=-1} = \operatorname{tg} \alpha_1 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = 135°;$$
$$k_{x=0} = \operatorname{tg} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°.$$

Пример 13.

К параболе $y = 3x^2 - x$ в точке $x_1 = -1$ проведены касательная и нормаль. Составить их уравнения.

РЕШЕНИЕ. Ордината точки касания $y(-1)$ составляет $3(-1)^2 - (-1) = 4$, т. е. координаты точки касания: $(-1; 4)$. Угловой коэффициент $k_{x=-1}$ равен $y'(-1) = (3x^2 - x)'_{x=-1} = (6x - 1)_{x=-1} = -7$.

Составим уравнение касательной, подставив в (5.21) координаты $(-1; 4)$ и значение $k = -7$:

$$y - 4 = -7(x + 1) \Rightarrow 7x + y + 3 = 0.$$

Составим уравнение нормали, воспользовавшись (5.22):

$$y - 4 = -\frac{1}{-7}(x + 1) \Rightarrow x - 7y + 29 = 0.$$

Формулы:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \qquad (5.21)$$

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_1). \qquad (5.22)$$

п.4 Физическое приложение производной.

Пример 14.

Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t_0 = 4$ с.

РЕШЕНИЕ. Скорость движения точки в любой момент времени t:

$$v = \frac{dS}{dt} = 6t^2 + 2t.$$

Тогда скорость движения точки в момент t_0:

$$v(t_0) = 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 2 = 104 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение движения точки в любой момент времени t:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t + 2.$$

Тогда ускорение движения точки в момент времени t_0:

$$a(t_0) = 12 \cdot 4 + 2 = 50 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

При вращательном движении угловой скоростью называется скорость ω изменения угла поворота φ за время t. Угловая скорость равна производной угла поворота φ по времени t:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение ε равно производной от угловой скорости ω по времени t:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Пример 15.

При торможении маховик за t (с) поворачивается на угол $\varphi = 3 + 8t - t^2$. Найти: 1) угловую скорость ω в момент времени $t_0 = 3$ с; 2) угловое ускорение ε в момент t_0; 3) момент времени t^*, когда вращение прекратится.

РЕШЕНИЕ. 1) Угловая скорость ω равна $8 - 2t$. Тогда в момент времени t_0 угловая скорость составляет $8 - 2 \cdot 3 = 2$ (рад/с); 2) угловое ускорение ε равно -2; таким образом, в любой момент времени оно составляет $\varepsilon = -2$; положив $\omega = 0$, найдем

$$8 - 2t^* = 0; \; t^* = 4 \text{ (с)}.$$

Движение прекратится в момент t^*, так как в этот момент угловая скорость $\omega(t^*) = 0$.

Пусть при нагревании тела его температура T изменяется в зависимости от времени по закону $T = f(t)$. Тогда скорость нагревания тела — это производная температуры тела по времени $\frac{dT}{dt}$.

Пример16.

Закон изменения температуры тела T задан соотношением $T = 0{,}2t^2$, где t — время. С какой скоростью нагревается тело в момент времени $t_0 = 10$ с?

РЕШЕНИЕ. Скорость нагревания тела составляет $0{,}4t$. Тогда в момент времени t_0 эта скорость равна $0{,}4 \cdot 10 = 4$.

п.5 Исследование функций с помощью производных.

Возрастание и убывание функции. Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной: если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает в этом промежутке; если же $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом промежутке.

Максимум и минимум функции. Функция $y = f(x)$ имеет максимум (минимум) при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство

$$f(a) > f(x) \qquad (f(a) < f(x)).$$

Функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет максимум, если:

1) $f'(a) = 0$;
2) $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с (+) на (−).

Функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет минимум, если:

1) $f'(a) = 0$;
2) $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с (−) на (+).

Точки максимума (max) и минимума (min) функции называются точками **экстремума**.

ПРАВИЛО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Приравнять ее нулю и найти действительные корни — ***критические точки*** x_0 функции $y = f(x)$ (при мнимых корнях экстремум функции не существует).

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.

IV. Критическая точка x_0 есть точка максимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) > 0$ слева от точки x_0, от промежутка, в котором $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, т. е. производная меняет знак с (+) на (−) при переходе через точку x_0.

V. Критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$ слева от точки x_0, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$ справа от точки x_0, т. е. производная меняет знак с (−) на (+) при переходе через точку x_0.

Если в промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то точка x_0 экстремума не имеет.

VI. Вычислить значения функции в точках экстремума.

ПРАВИЛО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.

III. Найти вторую производную $f''(x)$.

IV. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.

Наименьшее и наибольшее значения функции. Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

I. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках.

II. Найти значения функции на концах промежутка.

III. Сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Направление выпуклости графика функции. Кривая $y = f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** в промежутке $a < x < b$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка, и наоборот, ***выпуклой вверх***, если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка.

Выпуклость кривой $y = f(x)$ вниз или вверх характеризуется знаком ее второй производной: если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз; если $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх.

Точки перегиба. Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений, называется ***точкой перегиба***. Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв. Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

ПРАВИЛО НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

I. Найти область определения функции.

II. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.

III. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).

IV. Найти асимптоты графика функции.

V. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.

VI. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

Пример 17.

Исследовать заданную функцию $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

методами дифференциального исчисления и построить эскиз графика.

Решение:

РЕШЕНИЕ. 1. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной и не является периодической.

3. Находим точку пересечения графика с осью Oy: при $x = 0$ значение функции $f(0) = -3$. Точки пересечения графика функции с осью Ox найти затруднительно, так как для этого необходимо решить кубическое уравнение $f(x) = 0$.

4. Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Критические точки функции $f(x)$: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Эти точки делят область определения функции на три промежутка: $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$.

В первом и последнем из них $f'(x) > 0$, в промежутке $x \in (1; 3)$ производная $f'(x) < 0$. Следовательно, в промежутках $x \in (-\infty; 1)$, $x \in (3; +\infty)$ функция возрастает, а в промежутке $x \in (1; 3)$ — убывает. При переходе через точку x_1 производная меняет знак с *плюса* на *минус*, а при переходе через точку x_2 — с *минуса* на *плюс*. Таким образом, $(1; 1)$ — точка максимума, а $(3; -3)$ — точка минимума.

Находим вторую производную $f''(x) = 6x - 12$; из решения уравнения $f''(x) = 0$ получаем $x = 2$. Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка $x \in (-\infty; 2)$ и $x \in (2; +\infty)$. В первом из них $f'' < 0$, т. е. кривая выпукла вверх, а во втором $f'' > 0$, т. е. кривая выпукла вниз. Получили точку перегиба $(2; -1)$.

По полученным точкам построим приближенный график данной функции (рис. 128).

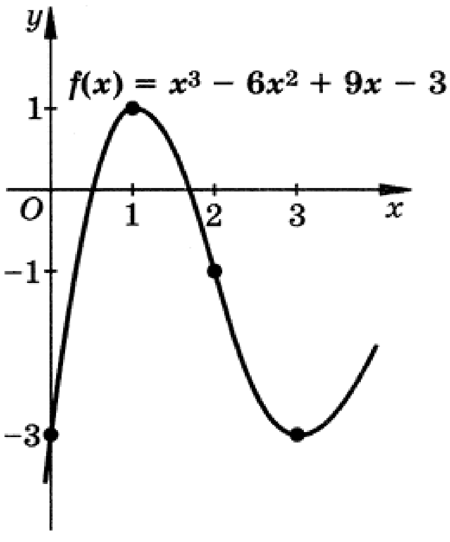

Рис. 128

п. 6 Дифференциал функции.

Дифференциал аргумента $\mathrm{d}x$ принимается равным приращению аргумента, т. е.

$$\mathrm{d}x = \Delta x,$$

а дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению производной функции на дифференциал аргумента, т. е.

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Из этого следует, что производная функции $y = f(x)$ есть отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента

$$f'(x) = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

п. 7 Неопределённый интеграл.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Отыскание первообразной функции $F(x)$ по заданной ее производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)\mathrm{d}x$ есть действие, обратное дифференцированию, оно называется ***интегрированием***.

Совокупность первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)\mathrm{d}x$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается символом

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

если

$$\mathrm{d}[F(x) + C] = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)\,\mathrm{d}x$ — подынтегральное выражение, C — произвольная постоянная.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

I. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

II. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

III. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx.$$

IV. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

V. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ — любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\int dx = x \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \qquad \int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

Интегрирование методом замены переменной. Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ в интеграл $\int F(u)\,\mathrm{d}u$.

♦ ПРИМЕР. Вычислить $\int \dfrac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$.

РЕШЕНИЕ. Положим $x^2 + 1 = u$, имеем $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $x\mathrm{d}x = (1/2)\mathrm{d}u$. Тогда

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = \int (x^2+1)^{-3}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^{-3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C.$$

п.8 Определённый интеграл.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит ***формула Ньютона — Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Например,

$$\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3};$$

$$\int_1^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной. Проиллюстрируем этот способ с помощью примеров.

♦ ПРИМЕР 1. Вычислить

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x-1}}.$$

РЕШЕНИЕ. Положим $5x - 1 = u$, тогда $5\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}x = (1/5)\,\mathrm{d}u$. Вычисляем новые пределы интегрирования: $u_н = 5\cdot 1 - 1 = 4$, $u_в = 5\cdot 2 - 1 = 9$. Поэтому

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \int_1^2 (5x-1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{5}\int_4^9 u^{-1/2}\,du =$$

$$= \frac{2}{5}u^{1/2}\Big|_4^9 = \frac{2}{5}(9^{1/2}-4^{1/2}) = \frac{2}{5}.$$

♦ ПРИМЕР 2. **Вычислить**

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,dx}{3-\cos x}.$$

РЕШЕНИЕ. **Введем новую переменную подстановкой $3-\cos x = u$. Продифференцировав, получим $\sin x\,dx = du$. Находим новые пределы интегрирования. Подставив в выражение ($3-\cos x = u$) значения 0 и $\pi/3$, соответственно получим**

$$u_н = 3-\cos 0 = 3-1 = 2, \quad u_в = 3-\cos \pi/3 = 3-1/2 = 5/2.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,dx}{3-\cos x} = \int_2^{5/2} \frac{du}{u} = \ln u\,\Big|_2^{5/2} = \ln\frac{5}{2} - \ln 2 = \ln\frac{5}{4} =$$

$$= \ln(1{,}25) \approx 0{,}2231.$$

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что:

а) если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 147, *а*);

б) если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен взятой со знаком «минус» площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 147, *б*).

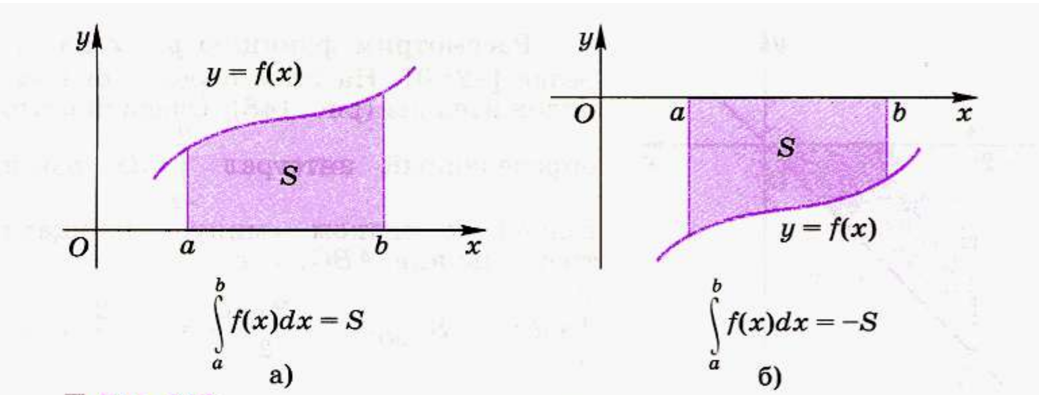

Рис. 147

Пример 18. Вычислим площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$

Сначала определим абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x + 2$, решив уравнение $x^2 = x + 2$.

Корни этого уравнения $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Искомая фигура на рисунке 153 закрашена. Ее площадь вычислим как разность площадей трапеции $ABCD$ и криволинейной трапеции $ABOCD$, где $B(-1;\ 1)$, $C(2;\ 4)$. Так как

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD = \frac{5}{2} \cdot 3 = 7{,}5 \text{ (кв. ед.)},$$

$$S_{ABOCD} = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3 \text{ (кв. ед.)},$$

то $S = S_{ABCD} - S_{ABOCD} = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$ (кв. ед.).

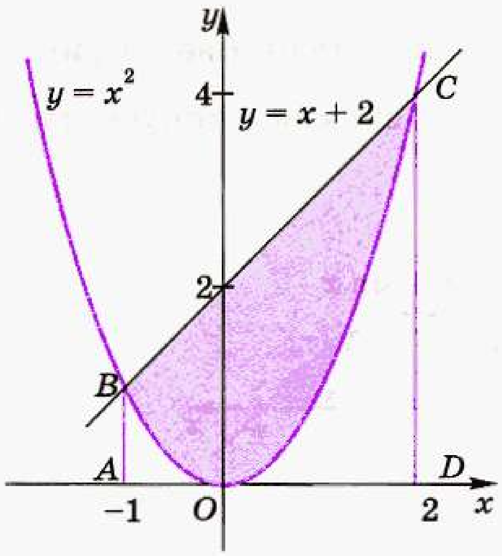

Рис. 153

п.8 Применение определённых интегралов в геометрических и физических задачах.

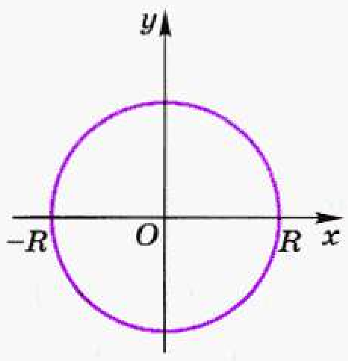

Рис. 162

ПРИМЕР 1. Площадь круга. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале системы координат xOy (рис. 162) имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно, ее часть, расположенная выше оси Ox, есть график функции

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Но тогда площадь круга радиуса R равна $S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$. Заменим переменную в этом интеграле: $x = R\sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда при возрастании переменной θ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ переменная x возрастает от $-R$

до R. При этом $\cos\theta \geqslant 0$ и $dx = R\cos\theta\, d\theta$. Поэтому получим

$$S = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta}\, R\cos\theta\, d\theta = 2R^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= 2R^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = 2R^2\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.$$

Итак, $S = \pi R^2$.

ПРИМЕР 2. Объем тела вращения. Пусть Γ есть график непрерывной положительной функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ в прямоугольной системе координат xOy. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного поверхностью вращения кривой Γ вокруг оси x и плоскостями, проходящими через точки $x = a$, $x = b$ перпендикулярно оси x (рис. 163). Произведем разбиение отрезка $[a; b]$ на части

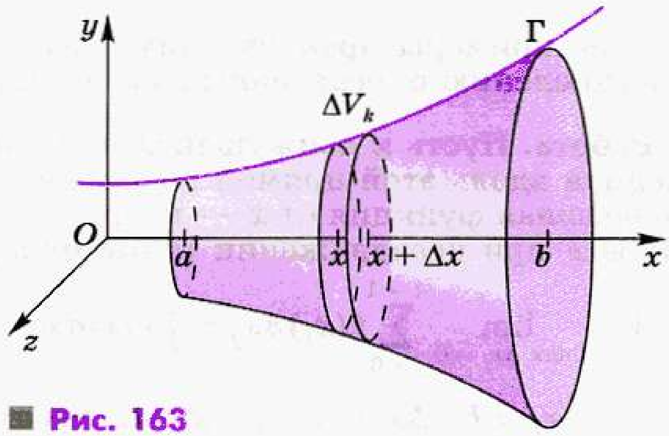

Рис. 163

точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — и будем считать, что элемент объема ΔV_k тела вращения, ограниченный плоскостями, проходящими через точки x_k и x_{k+1} перпендикулярно оси x, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса основания $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

Но тогда объем V может быть записан при помощи приближенного равенства $V \approx \pi \sum\limits_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k$. Чтобы получить точное равенство, надо взять предел

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 dx,$$

и мы получим формулу для объема тела вращения

$$V = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 dx. \qquad (1)$$

ПРИМЕР 3. Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — координаты движущейся точки. Работа силы F при передвижении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности функции $f(x)$ произведение $f(x_j)\Delta x_j$ близко к истинной работе на отрезке $[x_j;\ x_{j+1}]$, а сумма таких произведений близка к истинной работе на отрезке $[a;\ b]$, и притом тем ближе, чем меньше наибольший из всех Δx_j.

ПРИМЕР 4. Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a;\ b]$ оси Ox имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geqslant 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция. Общая масса этого отрезка

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(x_j)\Delta x_j = \int_a^b \rho(x)\,dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

ПРИМЕР 5. Работа электрического заряда. Пусть c и c_1 — два заряда, находящиеся на прямой на расстоянии r друг от друга. Сила взаимодействия F между ними направлена вдоль этой прямой и равна $F = \frac{a}{r^2}$ ($a = kcc_1$, где k — постоянная). Работу W этой силы, когда заряд c неподвижен, а заряд c_1 передвигается по отрезку $[R_1;\ R_2]$, можно подсчитать, разбивая отрезок $[R_1;\ R_2]$ на части длины Δr_j. На каждой из них приближенно считаем силу постоянной, тогда работа на таком участке равна $\frac{a}{r_j^2}\Delta r_j$. Делая части разбиения все более короткими, убеждаемся, что работа

$$W = \lim_{\Delta r \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a}{r_j^2}\Delta r_j = \int_{R_1}^{R_2} \frac{a}{r^2}\,dr \quad (0 < R_1 < R_2).$$

Этот интеграл вычисляем, принимая во внимание, что

$$\frac{a}{r^2} = \left(-\frac{a}{r}\right)'_r, \text{ откуда } W = -\frac{a}{r}\bigg|_{R_1}^{R_2} = a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

В частности, работа, выполненная силой F при передвижении заряда c_1, находившегося сначала на расстоянии R_1 от заряда c, на бесконечность равна

$$W = \lim_{R_2 \to 0} a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{a}{R_1} \quad (0 < R_1).$$

ПРИМЕР 6. Давление жидкости на стенку. Бассейн высоты H наполнен водой. Вычислить давление воды на прямоугольную стенку бассейна с основанием a.

Делим высоту H на n равных малых частей Δh. Стенка разделится на «элементы» (один из них закрашен на рисунке 164). Так как кубометр воды весит тонну, то давление столба жидкости высоты h_i м на площадку, имеющую площадь 1 м^2, равно h_i тоннам.

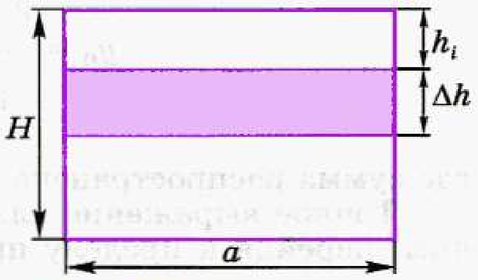

Рис. 164

Давление же воды на элемент, находящийся на глубине h_i, равно произведению h_i на площадь элемента: $h_i a\Delta h$. Величина давления на стенку приближенно равна

$$P \approx \sum_{i=1}^{n-1} a h_i \Delta h = a \sum_{i=1}^{n-1} h_i \Delta h,$$

где сумма распространена на все Δh. Точное же ее выражение равно

$$P = \lim_{\Delta h \to 0} a \sum_{i=1}^{n-1} h_i \Delta h = a \int_0^H h\,dh = a \left.\frac{h^2}{2}\right|_0^H = \frac{aH^2}{2}.$$

Пример 19.

Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за четвертую секунду.

РЕШЕНИЕ. Здесь пределами интегрирования являются $t_1 = 3$, $t_2 = 4$. Следовательно,

○ Согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t$, $t_1 = 3$, $t_2 = 4$. Следовательно,

$$s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)\,dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83 \text{ (м)}.$$ ●

Пример 20.

Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = (39{,}2 - 9{,}8t)$ (м/с). Найти наибольшую высоту $H_{\max}$ подъема тела.

РЕШЕНИЕ. Тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t_0, когда $v = 0$, т. е. $39{,}2 - 9{,}8t_0 = 0$, следовательно, $t_0 = 4$ (с). Находим:

$$H_{\max} = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)\,\mathrm{d}t = (39{,}2t - 4{,}9t^2)\Big|_0^4 = 78{,}4 \text{ (м)}.$$

Пример 21.

Укорочение x винтовой пружины при сжатии пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу A силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

РЕШЕНИЕ. По формуле (9.19) $F = k \cdot 0{,}01$, следовательно, $k = 1000$ (Н/м), поэтому в данной задаче $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x$. Работу найдем по (9.18), полагая $a = 0$, $b = 0{,}04$:

$$A = \int_0^{0,04} 1000x\,dx = 500x^2 \Big|_0^{0,04} = 0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

$$F = kx, \qquad (9.19)$$

где F — сила; x — абсолютное удлинение пружины, вызванное силой F, k — коэффициент пропорциональности.

Пример 22.

Цилиндрическая цистерна с радиусом основания $r = 0{,}5$ м и высотой $H = 2$ м заполнена водой. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Определить работу A, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

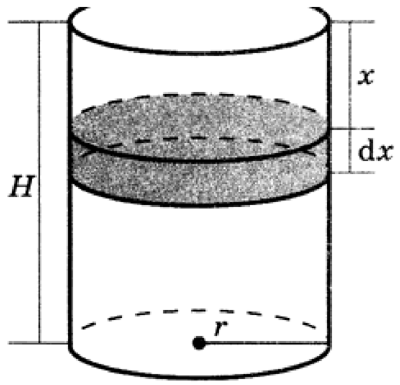

Рис. 137

РЕШЕНИЕ. Вес воды, заполняющей цистерну, равен

$$P = mg,$$

где $m = \rho V$ — масса воды, V — объем цистерны, g — ускорение свободного падения ($g = 9{,}8$ м/с^2). Таким образом,

$$P = \rho V g.$$

Чтобы поднять слой воды dx на высоту x, необходимо совершить работу

$$dA = dPx,$$

где $dP = \rho g\,dV$ — вес выделенного слоя, dV — его объем. Так как $dV = \pi r^2\,dx$, получим

$$dA = \rho g \pi r^2 x\,dx.$$

Для того чтобы получить выражение для работы A, следует взять определенный интеграл в пределах от 0 до H:

$$A = \int_0^H \rho g \pi r^2 x \, \mathrm{d}x = \rho g \pi r^2 \int_0^H x \, \mathrm{d}x = \rho g \pi r^2 \frac{H}{2} =$$

$$= 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{4}{2} \approx 15\,400 \text{ (Дж)}.$$

Пример 23. Вычислите силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20 м и высотой 5 м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).

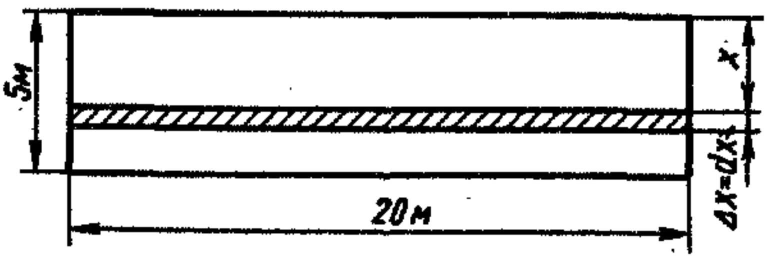

Рис. 86

○ На глубине x выделим горизонтальную полоску шириной dx (рис. 86). Сила давления P на стенку шлюза есть функция от x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давления P на малую величину ΔP. Продифференцировав переменную P, получим приближенное значение (главную часть) dP приращения ΔP.

Находим приближенное значение силы давления воды на эту полоску: $\Delta P = 9{,}807\,\delta x \Delta S = 9807 x \cdot 20 \Delta x$. Но $dP \approx \Delta P$. Интегрируя dP при изменении x от 0 до 5, получим

$$P = 9807 \cdot 20 \int_0^5 x\,dx = 9807 \cdot 10 x^2 \Big|_0^5 = 2{,}45 \text{ (МН)}. \quad \bullet$$

Тема. Дифференциальные уравнения.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается в следующем виде:

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$F(x, y, y'') = 0,$$

....

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***. Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением ***с разделяющимися переменными*** называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Пример 24.

Найти общее решение уравнения $x(1+y^2)\,dx = y\,dy$.

○ Разделив переменные, имеем

$$x\,dx = \frac{y\,dy}{1+y^2}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int x\,dx = \int \frac{y\,dy}{1+y^2};\quad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $(1/2)\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим

$$x^2 = \ln\left[C(1+y^2)\right].$$

Это и есть общее решение данного уравнения. ●

Пример 25.

2. Найти частное решение уравнения $s\,\mathrm{tg}\,t\,dt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $s=4$ при $t=\pi/3$.

○ Разделив переменные, имеем

$$\mathrm{tg}\,t\,dt + \frac{ds}{s} = 0.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \mathrm{tg}\,t\,dt + \int \frac{ds}{s} = \ln C;\quad -\ln\cos t + \ln s = \ln C,$$

или

$$\ln s = \ln C + \ln\cos t,\quad s = C\cos t.$$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t=\pi/3$ и $s=4$ в выражение для общего решения: $4=C\cos(\pi/3)$, или $4=C/2$, откуда $C=8$.

Следовательно, искомое частное решенне, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s=8\cos t$. ●

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+f(x)\,y+\varphi(x)=0,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции от x, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y=uz$, где u и z — новые функции от x.

Пример 26.

Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

○ Это линейное уравнение: здесь $f(x)=-2/(x+1)$, $\varphi(x)=-(x+1)^3$. Положим $y=uz$ и продифференцируем это равенство по x:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}.$$

Подставив теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}-\frac{2uz}{x+1}=(x+1)^3,$$

или

$$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dx}-\frac{2u}{x+1}\right)=(x+1)^3. \qquad (*)$$

Так как одну из вспомогательных функций u или z можно выбрать произвольно, то в качестве u возьмем одно из частных решений уравнения $\frac{du}{dx}-\frac{2u}{x+1}=0$. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{du}{u}-\frac{2dx}{x+1}=0,\quad \int\frac{du}{u}=2\int\frac{dx}{x+1};\quad \ln u=2\ln(x+1),\quad u=(x+1)^2$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю, так как находим одно из частных решений).

Подставим теперь выражение для u в уравнение (*); тогда получим уравнение

$$(x+1)^2\frac{dz}{dx}=(x+1)^3, \text{ или } \frac{dz}{dx}=x+1.$$

Отсюда находим

$$\int dz=\int(x+1)\,dx;\quad z=\frac{(x+1)^2}{2}+C.$$

Зная u и z, теперь получаем общее решение данного уравнения:

$$y=uz=(x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2}+C\right]=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2. \text{ ●}$$

Пример 27.

Найти частное решение уравнения $\cos x\,dy+y\sin x\,dx=dx$, если $y=1$ при $x=0$.

○ Разделив все члены данного уравнения на $\cos x\,dx$, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx}+y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}, \tag{*}$$

которое является линейным. Положим $y=uz$; тогда $\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}$. Подставив выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (*), имеем

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}+uz\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x},$$

или

$$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dx}+u\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\cos x}. \tag{**}$$

Для отыскания u получаем уравнение

$$\frac{du}{dx}+u\operatorname{tg}x=0, \text{ т. е. } \frac{du}{u}+\operatorname{tg}x\,dx=0,$$

откуда

$$\int\frac{du}{u}=-\int\operatorname{tg}x\,dx;\quad \ln u=\ln\cos x;\quad u=\cos x.$$

Подставляя выражение для u в уравнение (*), имеем

$$\cos x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\cos x}, \text{ или } \frac{dz}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}, \text{ т. е. } z=\operatorname{tg}x+C.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения записывается так:

$$y=uz=\cos x(\operatorname{tg}x+C)=\sin x+C\cos x.$$

Используя начальные условия $y=1$, $x=0$, имеем $1=\sin 0+C\cos 0$, откуда $C=1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=\sin x+\cos x$. ●

Уравнение, содержащее производные (или дифференциалы) не выше второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. В общем виде уравнение второго порядка записывается следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right).$$

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Пример 28.

Найти общее решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$.

○ Это неполное дифференциальное уравнение второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$. Полагаем $\frac{dy}{dx}=z$; тогда данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\sin x,\ \text{ т. е. }\ \frac{dz}{dx}=\sin x,$$

откуда $dz=\sin x\,dx$. Интегрируя последнее равенство, получим

$$\int dz=\int \sin x\,dx,\ \text{ т. е. }\ z=-\cos x+C_1.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\cos x+C_1,\ \text{ т. е. }\ dy=(-\cos x+C_1)\,dx.$$

Снова интегрируя, находим

$$\int dy=\int(-\cos x+C_1)\,dx,\ \text{ или }\ y=-\sin x+C_1x+C_2.$$

Это и есть общее решение данного уравнения. ●

Пример 29.

Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}$, если $y=\frac{3}{2}$ и $\frac{dy}{dx}=1$

при $x=0$.

○ Это неполное дифференциальное уравнение второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Положим $\frac{dy}{dx}=z$; тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ и, значит, $\frac{dz}{dx}=2z$. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{z}=2dx;\quad \int\frac{dz}{z}=2\int dx,\ \ln z=2x+C_1;\ \ z=e^{2x+C_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x+C_1}, \tag{*}$$

т. е. $dy=e^{2x+C_1}dx$. Интегрируя, находим общее решение данного уравнения:

$$y=(1/2)\,e^{2x+C_1}+C_2. \tag{**}$$

Для нахождения искомого частного решения подставим в соотношения (*) и (**) начальные данные:

$$\begin{cases} 1=e^{2\cdot 0+C_1}, \\ 3/2=(1/2)\,e^{2\cdot 0+C_1}+C_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1=e^{C_1}, \\ 3/2=(1/2)\,e^{C_1}+C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1=0$, $C_2=1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=(1/2)\,e^{2x}+1$. ●

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0, \tag{15.1}$$

где p и q — постоянные величины.

Для отыскания общего решения уравнения (15.1) составляется *характеристическое уравнение*

$$r^2+pr+q=0, \tag{15.2}$$

которое получается из уравнения (15.1) заменой $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ и y на соответствующие степени r, причем сама функция y заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (15.1) строится в зависимости от корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (15.2). Здесь возможны три случая.

I случай. Корни r_1 и r_2 — действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения (15.1) имеет вид

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}. \tag{15.3}$$

II случай. Корни r_1 и r_2 — действительные и равные: $r_1=r_2=r$. Тогда общее решение уравнения (15.1) записывается так:

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{rx}. \tag{15.4}$$

III случай. Корни r_1 и r_2 — комплексно-сопряженные: $r_1=\alpha+\beta i$; $r_2=\alpha-\beta i$. В этом случае общее решение уравнения (15.1) записывается следующим образом:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \tag{15.5}$$

Пример 30.

Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}+10y=0$.

○ Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2-7r+10=0$; $r_1=2$, $r_2=5$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения согласно формуле (15.3) запишется так: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$. ●

Пример 31.

Найти частное решение уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}=0$, если $y=1$ и

$\frac{dy}{dx}=-1$ при $x=0$.

○ Составим характеристическое уравнение $r^2-5r=0$, откуда $r_1=0$, $r_2=5$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{5x}, \text{ т. е. } y=C_1+C_2e^{5x}.$$

Для нахождения искомого частного решения нужно определить значения постоянных C_1 и C_2. Подставив в общее решение значения $x=0$, $y=1$, получим $1=C_1+C_2$.

Продифференцировав общее решение и подставив в полученное выражение значения $x=0$, $\frac{dy}{dx}=-1$, имеем $\frac{dy}{dx}=5C_2e^{5x}$; $-1=5C_2$. Отсюда находим: $C_2=-1/5$, $C_1=1-C_2=6/5$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=6/5-(1/5)e^{5x}$. ●

Пример 32.

Решить уравнение $y''-6y'+25y=0$.

○ Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $r^2-6r+25=0$; $r_1=3+4i$, $r_2=3-4i$; здесь $\alpha=3$, $\beta=4$. Так как характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, то общее решение дифференциального уравнения согласно формуле (15.5) записывается в виде $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$. ●

формула:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \qquad (15.5)$$

Тема. Ряды.

⇛ Пусть задана бесконечная последовательность чисел (действительных или комплексных)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Сокращенно ряд обозначают следующим образом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. При этом числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда, а число a_n — *общим членом* ряда. Суммы вида

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$$

называются *частичными суммами* ряда. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

В этом случае указанный предел называется *суммой ряда*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то числовой ряд называется *расходящимся* и суммы не имеет. ⇚

Признак Даламбера

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то — расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Пример 33.

Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^{n+1}}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

❍ а) Преобразуем выражение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{3^{(n+1)+1}} : \frac{n^5}{3^{n+1}} = \frac{(n+1)^5}{n^5} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5.$$

Так как $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$ и $\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \to 0$ при $n \to \infty$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{3} < 1,$$

и исходный ряд сходится по признаку Даламбера.

б) Поскольку

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \quad \text{(2-й замечательный предел),}$$

и, значит, исходный ряд расходится. ●

⇛ *Знакочередующимся* называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки. Таким образом, знакочередующийся ряд — это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \tag{2.1}$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_n + \ldots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{2.2}$$

где все a_n — положительные действительные числа ($a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$). ⇚

Признак Лейбница

Пусть дан знакочередующийся ряд (вида (2.1) или (2.2)). Если выполнены два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \ldots$ (абсолютные величины членов ряда монотонно убывают);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$),

то ряд сходится.

⇛ Ряд, содержащий и положительные и отрицательные члены, называется *знакопеременным*. В частности, всякий знакочередующийся ряд является знакопеременным. ⇚

Теорема 1.4. Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n — произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

В этом случае знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся.*

⇛ Если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся.* ⇚

Пример 34.

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$

❍ Решение: Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница. Следовательно, указанный ряд сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

расходится (гармонический ряд). ●

Пример35.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^2+1}{5n^2-2}$.

❍ Нетрудно показать, что для данного ряда не выполнен необходимый признак сходимости. В самом деле:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{5n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Следовательно, ряд расходится. ●

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots , \qquad (27.4)$$

где числа a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... называются *коэффициентами* ряда, а член $a_n x^n$ --*общим членом* ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x. при которых данный ряд сходится.

Число R называется *радиусом сходимости* ряда (27.4), если при $|x|<R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x|>R$ ряд расходится.

Радиус сходимости R можно найти, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

(x не зависит от n), откуда

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad (27.5)$$

т. е. если ряд (27.4) сходится при любых x, удовлетворяющих условию (27.5), и расходится при

$$|x| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (27.6)$$

Отсюда следует, что если существует предел

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (a_n\neq 0,\ n=1,\ 2,\ 3,\dots), \qquad (27.7)$$

то радиус сходимости ряда R равен этому пределу и ряд (27.4) сходится при $|x|<R$, т. е. в промежутке $-R<x<R$, который называется *промежутком (интервалом) сходимости.*

Если предел (27.7) равен нулю ($R=0$), то ряд (27.4) сходится в единственной точке $x=0$.

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots\ . \qquad (27.8)$$

Если $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots\ , \qquad (27.9)$$

который называется *рядом Маклорена.*

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке $x=0$, т. е. $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$;

2) составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу (27.9);

3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле (27.7).

Для разложения функции в ряд Тейлора необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке $x=a$, т. е. $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$;

2) составить ряд Тейлора, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу (27.8);

3) найти промежуток сходимости по формуле (27.7).

Пример 36.

Разложить в ряд Маклорена функцию:

$$f(x)=e^x$$

○ 1) Вычислим значения функции и ее производных при $x=0$; имеем $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x, \ldots$, $f^{(n)}(x)=e^x$; $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1, \ldots$, $f^{(n)}(0)=1$ $(n=1,\ 2,\ 3, \ldots)$.

Подставив эти значения в формулу (27.9), получим разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots .$$

Этот ряд называется *экспоненциальным рядом.*

Промежуток сходимости найдем по формуле (27.7):

$$a_n=\frac{1}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)n!};\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)n!}{n!}=n+1;$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}|n+1|=\infty,\ \text{т. е.}\ -\infty<x<\infty.$$

Полученный ряд сходится к функции $f(x)=e^x$ при любых значениях x, так как в любом промежутке функция $f(x)=e^x$ и ее производные по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом.

Тема. Элементы теории вероятностей.

п. 1. Элементы комбинаторики.

Размещения. ***Размещениями*** из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(m-1)].$$

Перестановки. ***Перестановками*** из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n.

Перестановки представляют собой частный случай размещений из n элементов по n в каждом, т. е.

$$P_n = A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

или

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n.$$

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно. Произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ обозначают символом $n!$ (n-факториал), причем полагают $0! = 1$, $1! = 1$.

Предыдущую формулу можно записать в виде $P_n = n!$. Тогда формулу размещений можно записать в виде

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При решении задач используется формула $A_n^{m+1} = (n-m)\,A_n^m$.

Сочетания. ***Сочетаниями*** из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m},$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

или

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(m-1)]}{m!}.$$

(1-я строка — без повторений, 2-я строка — с повторениями)

	Размещения	Перестановки	Сочетания
1	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$P_n = n!$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2	$\overline{A}_n^k = n^k$	$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$ $(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Пример 37.

Сколькими способами 3 награды (за I, II, III места) могут быть распределены между 10 участниками соревнований?

Будем считать, что каждый участник соревнований может получить не более одной награды. Выбрать 3-х участников соревнований из 10 можно

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 720$$

способами, так как «призовые тройки» отличаются друг от друга либо составом участников, либо порядком их следования.

Этот же результат можно получить, применяя правило умножения: претендентов на главную награду (за I место) 9; на вторую — 8; на третью — 7; число различных способов распределения наград равно $10\cdot 9\cdot 8 = 720$. ●

Пример 38.

Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д. Лондона, располагая их:

а) в произвольном порядке;

б) так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом (в любом порядке);

в) так, чтобы I, II, III тома не стояли рядом (в любом порядке).

а) Число способов расстановки 10 книг равно числу перестановок из 10 элементов: $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$.

б) Мысленно связав I, V и IX тома или положив в один пакет, получим 8 «книг», т. е. 7 книг и 1 связку (или пакет) книг. Их можно расставить на полке $P_8 = 8!$ способами. Каждому из этих способов расстановки соответствуют $P_3 = 3!$ способов расстановки книг, находящихся в связке (I, V и IX тома по-прежнему стоят рядом, но в ином порядке). Согласно правилу умножения, число возможных расстановок 10 книг на полке так, чтобы 3 определенные книги (I, V и IX тома) стояли рядом, равно $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 40\,320 \cdot 6 = 241\,920$.

в) Искомое число способов расстановки книг, с учетом пунктов а) и б), равно $P_{10} - P_8 \cdot P_3 = 3\,628\,800 - 241\,920 = 3\,386\,880$. ●

Пример 39.

Из элементов (цифр) 2, 4, 5 составить все размещения и сочетания с повторениями по два элемента.

Размещения с повторениями по два элемента таковы: $(2,2)$; $(2,4)$; $(2,5)$; $(4,4)$; $(4,5)$; $(4,2)$; $(5,5)$; $(5,2)$; $(5,4)$.

Их число можно вычислить и по формуле (1.4):

$$\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9.$$

Сочетания с повторениями по два элемента таковы (в отличие от размещений здесь порядок элементов в выборке не имеет значения, т. е., например, пары $(2,4)$ и $(4,2)$ не различаются): $\{2,2\}$; $\{2,4\}$; $\{2,5\}$; $\{4,4\}$; $\{4,5\}$; $\{5,5\}$.

Их число можно вычислить и по формуле (1.5):

$$\overline{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$ ●

Пример 40.

Владимир хочет пригласить в гости троих из семи своих лучших друзей. Сколькими способами он может выбрать приглашенных?

Так как для Владимира важен только состав гостей (порядок роли не играет), то число способов выбора троих гостей из 7 можно найти по формуле сочетаний (1.3): $C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$. ●

п.2. Теория вероятностей.

Классическое определение вероятности

Вероятность события численно характеризует степень возможности его появления в рассматриваемом опыте.

⇛ Пусть производится опыт с n равновозможными исходами, образующими полную группу несовместных событий. Такие исходы называются *элементарными исходами (событиями), случаями, шансами.* Случай, который приводит к наступлению события A, называется *благоприятным* (или *благоприятствующим*) ему. ⇚

⇛ *Вероятностью события* A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Такое определение вероятности называется *классическим.* ⇚

Из классического определения следуют свойства вероятности: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $A \cdot B = \varnothing$.

Геометрическое определение вероятности

Обобщением понятия «классической вероятности» на случай опытов с бесконечным (вообще говоря, несчетным) числом исходов является понятие «геометрической вероятности». К этому понятию приводят задачи на подсчет вероятности попадания точки в некую область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т. д.).

Пусть пространство элементарных событий Ω представляет собой некоторую область плоскости. Тогда в качестве событий могут рассматриваться области A, содержащиеся в Ω.

⇛ Вероятность попадания в область A точки, наудачу выбранной из области Ω, называется *геометрической вероятностью* события A и находится по формуле

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ площади областей A и Ω соответственно. ⇚

Случай, когда Ω представляет собой отрезок или трехмерную область, рассматривается аналогично.

Задача 41.

В урне содержится 5 белых и 4 черных шара, различающихся только цветом.

1) Вынимается наудачу один шар. Найти вероятность того, что он белый.

2) Вынимаются наудачу два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них черный.

1) Перенумеруем шары. Пространство элементарных событий можно записать в виде $\Omega = \{Б_1, Б_2, Б_3, Б_4, Б_5, Ч_1, Ч_2, Ч_3, Ч_4,\}$. Пусть событие $A = \{$появление белого шара$\}$, тогда $A = \{Б_1, Б_2, Б_3, Б_4, Б_5\}$.

Так как все элементарные исходы равновозможны, то по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$.

2) При вынимании двух шаров возможны такие исходы: $(Б_1, Ч_1)$, $(Б_2, Б_3)$, $(Б_3, Б_2)$, $(Ч_4, Б_5)$ и т. д. Число всех случаев равно $n = A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$.

а) Исходами, благоприятствующими наступлению события $B = \{$появление двух белых шаров$\}$, являются $(Б_1, Б_2)$, $(Б_1, Б_3)$, $(Б_3, Б_5)$, $(Б_3, Б_1)$ и т. д. Число таких случаев равно $m = A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Поэтому $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$.

б) Исходами, благоприятствующими наступлению события $C = \{$появление хотя бы одного черного шара$\}$, являются $(Б_1, Ч_1)$, $(Б_1, Ч_2)$, $(Б_1, Ч_3)$, $(Ч_3, Б_1)$, $(Ч_1, Ч_2)$, $(Ч_3, Ч_4)$ и т. д. Число таких случаев равно $m = A_9^2 - A_5^2 = 72 - 20 = 52$ (в 20 случаях из 72 появятся два белых шара (см. пункт *а*), поэтому в остальных случаях хотя бы один из пары шаров будет черным. Отсюда $P(C) = \frac{52}{72} = \frac{13}{18}$. Этот же результат можно получить иначе, т. к. $C = \overline{B}$, то $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$. ●

Задача 42.

В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что:

а) все они одного цвета; **б)** все они разных цветов;

в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.

❍ Сначала заметим, что число способов выбрать 3 карандаша из 12 имеющихся в наличии равно $n = C_{12}^3 = 220$.

а) Выбрать 3 синих карандаша из 5 можно C_5^3 способами; 3 красных из имеющихся 4 можно выбрать C_4^3 способами; 3 зеленых из 3 зеленых — C_3^3 способами.

По правилу сложения общее число m случаев, благоприятствующих событию $A = \{$три карандаша, вынутых из коробки, одного цвета$\}$, равно $m = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$. Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

б) Пусть событие $B = \{$три вынутых карандаша разных цветов$\}$. Число m исходов, благоприятствующих наступлению события B, по правилу умножения равно $m = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

в) Пусть событие $C = \{$из трех выбранных карандашей 2 синих и 1 зеленый$\}$. Выбрать 2 синих карандаша из имеющихся 5 синих можно C_5^2 способами, а 1 зеленый из имеющихся 3 зеленых — C_3^1 способами. Отсюда по правилу умножения имеем: $m = C_5^2 \cdot C_3^1 = 30$. Поэтому $P(\mathrm{C}) = \frac{m}{n} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$. ●

Задача 43.

Противник в течение часа делает один десятиминутный налет на участок шоссе. В течение этого же часа нужно преодолеть этот опасный участок шоссе. С какой вероятностью можно избежать налета, если время преодоления опасного участка пять минут?

○ Обозначим через x момент времени, когда начинается выход на опасный участок шоссе, а через y — момент времени начала обстрела этого участка шоссе. Ясно, что $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$.

Будем рассматривать x и y как декартовы координаты на плоскости. Тогда элементарные исходы в данном опыте (он состоит в фиксации времени начала действий обеих сторон), изобразятся точками (x, y) квадрата со стороной $T = 60$, т. е. $\Omega = \{(x, y) : \ 0 \leqslant x \leqslant 60, \ 0 \leqslant y \leqslant 60\}$.

Интересующее нас событие $A = \{$удастся избежать налета$\}$ наступит тогда и только тогда, когда налет начнется спустя пять (или больше) минут после выхода на опасный участок либо начнется за десять (и более) минут до начала преодоления участка шоссе, т. е. должно выполняться одно из условий

$$\left[\begin{array}{l} y - x > 5, \\ x - y > 10. \end{array}\right.$$

Эти неравенства определяют благоприятствующую событию A область D, заштрихованную на рисунке 66.

Площадь области D равна $S(D) = \dfrac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 + \dfrac{1}{2} \cdot 55 \cdot 55 = 2762{,}5$; площадь квадрата Ω равна $S(\Omega) = 60 \cdot 60 = 3600$.

Тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{S(D)}{S(\Omega)} = \frac{2762{,}5}{3600} = \frac{221}{288} \approx 0{,}77.$$ ●

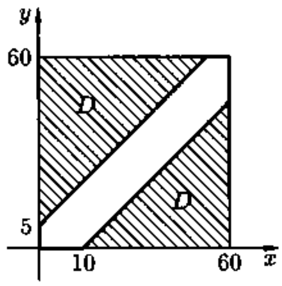

рис.66

Тема. Численное интегрирование.

Формулы прямоугольников:

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}); \tag{12.1}$$

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n). \tag{12.2}$$

Формула трапеций:

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right).$$

Формула параболических трапеций (формула Симпсона):

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right].$$

Задача 44.

Вычислить по формуле Симпсона $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, приняв $n=2$.

○ Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1-0}{6\cdot 2}\left[y_0+y_4+4(y_1+y_3)+2y_2\right].$$

Так как $y=f(x)=1/(1+x^2)$, $y_0=f(0)=1$, $y_1=f(1/4)=16/17$, $y_2=f(1/2)=4/5$, $y_3=f(3/4)=16/25$, $y_4=f(1)=1/2$, то

$$\int_0 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}\left[1+\frac{1}{2}+4\left(\frac{16}{17}+\frac{16}{25}\right)+2\cdot\frac{4}{5}\right]=0{,}78539.$$

Точное значение интеграла есть $\pi/4=0{,}78540$; относительная погрешность $\varepsilon=0{,}00127\%$. ●

Контрольные задания.

Задание 1.

Найдите сумму, разность, произведение, частное двух комплексных чисел:

1. $z_1 = -3 + 5i,\ z_2 = 4 - 7i;$

2. $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i,\ z_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i;$

3. $z_1 = -0{,}6 + 0{,}2i,\ z_2 = -0{,}4 - 0{,}5i;$

4. $z_1 = 3{,}6 + 0{,}2i,\ z_2 = 1{,}4 - 0{,}2i;$

5. $z_1 = 3 - 0{,}7i,\ z_2 = -3 + 0{,}7i;$

6. $z_1 = 4 - 2i,\ z_2 = 3 + 8i;$

7. $z_1 = 1{,}5 - 2{,}1i,\ z_2 = 0{,}5 + 0{,}9i;$

8. $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -4 + i;$

9. $z_1 = -1 + 6i,\ z_2 = 6 - i;$

10. $z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = 4 + 5i.$

Задание 2.

Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

11 $2 + 4i$
12 $\sqrt{3} - i$
13 $1 + i$
14 $-4 - 3i$
15 $1 - i$
16 $5i$
17 $-3 + 4i$
18 $3 - 4i$
19 $-3i$
20 $1 + 2i$

Задание 3.

Вычислить:

21. $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$

22. $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$

23. $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$

24. $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5}$

25. $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{33}}$

26. $(1 - i)^8$

27. $(1 + i)^{15}$

28. $\left(\frac{-1 + \sqrt{2}i}{2}\right)^3$

29. $(1 + i)^{-3}$

30. $(1 - i)^{-12}$

Задание 4.

31. Даны два множества:
А = {6 к + 3: к = 0. 1, 2, …} и В = {3m + 1: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) А UВ
б) А∩ В
в) В \ А.
Установите, является ли соответствие f : А→В, заданное формулой у $= \frac{x+5}{2}$
взаимно-однозначным?

32. Даны два множества:
А = {2 к : к = 0. 1, 2, …} и В = {2m + 1: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) А UВ
б) А∩ В
в) В \ А.
Установите, является ли соответствие f : А→В, заданное формулой
$y = x + 1$
взаимно-однозначным?

33. Даны два множества:
А = {2 к: к = 0. 1, 2, …} и В = {2m + 3: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) А UВ
б) А∩ В
в) В \ А.
Установите, является ли соответствие f : А→В, заданное формулой
$y = x + 1$
взаимно-однозначным?

34. Даны два множества:
А = {7 к + 3: к = 0. 1, 2, …} и В = {2 m + 1: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) А UВ
б) А∩ В
в) В \ А.
Установите, является ли соответствие f : А→В, заданное формулой
$y = \frac{x+6}{2}$
взаимно-однозначным?

35. Даны два множества:
А = {6 к + 5: к = 0. 1, 2, …} и В = {3m + 1: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) А UВ

б) A∩ B
в) B \ A.
Установите, является ли соответствие f : A→B, заданное формулой
$y = \frac{x+3}{2}$
взаимно-однозначным?

36. Даны два множества:
A = {$2^к$: к = 0. 1, 2, …} и B = {2m : m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) A UB
б) A∩ B
в) B \ A.
Установите, является ли соответствие f : A→B, заданное формулой
$y = 2^x$
взаимно-однозначным?

37. Даны два множества:
A = {6 к + 2: к = 0. 1, 2, …} и B = {7m + 2: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) A UB
б) A∩ B
в) B \ A.
Установите, является ли соответствие f : A→B, заданное формулой
$y = \frac{x+4}{2}$
взаимно-однозначным?

38. Даны два множества:
A = {4 к + 5: к = 0. 1, 2, …} и B = {5m + 2: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) A UB
б) A∩ B
в) B \ A.
Установите, является ли соответствие f : A→B, заданное формулой
$y = \frac{x+5}{2}$
взаимно-однозначным?

39. Даны два множества:
A = {$3^к$: к = 0. 1, 2, …} и B = {2m: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) A UB
б) A∩ B
в) B \ A.
Установите, является ли соответствие f : A→B, заданное формулой
$y = 3^x$
взаимно-однозначным?

40. Даны два множества:
A = {2 к + 5: к = 0. 1, 2, …} и B = {3m + 1: m = 0. 1, 2, …}. Найдите:
а) A UB
б) A∩ B
в) B \ A.
Установите, является ли соответствие f : A→B, заданное формулой

$y = \frac{x+3}{2}$
взаимно-однозначным?

Задание 5.

Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x

41. $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$, $x = \sqrt{5}$
42. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, $x = 2$
43. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $x = 3$
44. 1) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$, $x = \sqrt{3}$
45. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x = \sqrt{3}$
46. $f(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^2}$, $x = 2$
47. $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$, $x = 2$
48. $f(x) = (3x - 1)^4$, $x = 1$
49. $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3)^7$, $x = 1$
50. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$, $x = -1$

Задание 6.

51. 1) Найдите угол наклона параболы $y = x^2 - 2x$ к оси Ox в точке $x = 2$.
52. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой: $y = x^2 - 7x + 10$ в точке $x = 4$
53. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой: $y = 2x^3$ в точке $x = -1$
54. Найдите координаты точки, в которой касательная к параболе $y = x^2 + 3x - 10$ образует угол 135° с осью Ox.
55. 2) Найдите угол наклона касательной к кривой $y = x^3$, проведенной в точке $x = -2$ к оси Ox.
56. Сила тока I (А) изменяется в зависимости от времени t (с) по закону $I = 3t^2 + 2t + 1$. Найдите скорость изменения силы тока через 8 с.

57. **Зависимость температуры тела T от времени t задана уравнением $T = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 10$ с?**

58. **Тело массой $m = 12$ кг движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 2t + 3$. Найдите кинетическую энергию тела $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 5 с после начала движения. Здесь v — скорость тела.**

59. **Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2 - 8t + 4$. В какой момент времени t_0 скорость точки окажется равной нулю?**

60. **Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$. Найдите величины скорости и ускорения в момент времени $t = 2$ с.**

Задание 7.

Исследовать заданную функцию методами дифференциального исчисления и построить эскиз графика. Исследование функций рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) Найти область определения функции;
2) Найти производную функции;
3) Найти точки экстремума;
4) Определить промежутки монотонности функции;
5) Найти точки перегиба функции;
6) Определить промежутки выпуклости функции;
7) Найти значение функции в точках экстремума и перегиба;
8) Построить эскиз графика.

61. $y=2x^3-9x^2+12x-5$

62. $y=x^3-6x^2+9x+1$

63. $y=x^3-3x^2-9x+10$

64. $y=x^3+3x^2-9x-10$

65. $y=x^3+6x^2+9x+2$

66. $y=2x^3-3x^2-12x+5$

67. $y=2x^3+3x^2-12x-8$

68. $y=2x^3+9x^2+12x+7$

69. $y=2x^3-15x^2+36x-32$

70. $y=2x^3-15x^2+24x+4$

Задание 8.

Вычислите неопределённый интеграл методом замены переменной.

71. $\int (7-2x)^3\,dx$

72. $\int \frac{dx}{(4-3x)^2}$

73. $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$

74. $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx$

75. $\int \sqrt[3]{(4-3t)^2}\,dt$

76. $\int \frac{dz}{(5z+1)^3}$

77. $\int \sqrt{2x-1}\,dx$

78. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}$

79. $\int (x^2+3)^5 x\,dx$

80. $\int 4(x^4-1)x^3\,dx$

Задание 9.

81. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = 3t^2 - 2t - 1$. Вычислить ее путь за 5 с от начала движения.

82. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = 9t^2 - 2t - 8$. Вычислить ее путь за 3 с от начала движения.

83. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = 3t^2 - 2t + 5$. Вычислить ее путь за четвертую секунду.

84. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением

$v = 18t - 6t^2$.

Вычислить ее путь от начала движения до остановки.

85. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением

$v = 6t^2 - 4t - 10$.

Вычислить ее путь за 4 с от начала движения.

86. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия ее на 0,02 м была затрачена работа 30 Дж.

87. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,08 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

88. Вычислить работу, совершенную при растяжении пружины на 0,06 м, если для растяжения ее на 0,03 м нужна сила 15 Н.

89. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,01 нужна сила 10 Н.

90. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением

$v = 6t^2 - 10t$.

Вычислить ее путь за третью секунду.

Задание 10.

Найдите частное решение уравнения с разделяющимися переменными, удовлетворяющее начальному условию.

91. $(x^2+1)\,dy = 2xy\,dx$, если $y = 2$ при $x = 1$

92. $(1-x)\,dy - (y-1)\,dx = 0$, если $y = 3$ при $x = 2$

93. $(x+3)\,dy - (y+2)\,dx = 0$, если $y = 3$ при $x = 2$

94. $(1+x)y\,dx + (1-y)x\,dy = 0$, $y = 1$ при $x = 1$

95. $(1+y)\,dx = (1-x)\,dy$, $y = 3$ при $x = -2$

96. $2(x+1)\,dy = y\,dx$, если $y = 2$ при $x = 1$

97. $\dfrac{dy}{x^2} = \dfrac{dx}{y^2}$, $y = 2$ при $x = 0$

98. $ds = (3t^2 - 2t)\,dt$, $s = 4$ при $t = 2$

99. $x\,dy = y\,dx$, $y = 6$ при $x = 2$

100. $y\,dy = x\,dx$, $y = 4$ при $x = -2$

Задание 11. Найти частное решение дифференциального уравнения.

101 $y'' + y' - 6y = 0$, если $y = 3$, $y' = 1$ при $x = 0$

102 $y'' - 6y' + 9 = 0$, если $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

103 $y'' - 2y' - 8y = 0$, если $y = 4$, $y' = 10$ при $x = 0$

104 $y'' - 8y' + 16 = 0$, если $y = 2$, $y' = 9$ при $x = 0$

105 $y'' + y' - 6y = 0$, если $y = 0$, $y' = 10$ при $x = 0$

106 $y'' - 3y' = 0$, если $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$

107 $y'' - 2y' - 8y = 0$, если $y = 5$, $y' = 14$ при $x = 0$

108 $y'' + 5y' = 0,$ если $y = 2$, $y' = 3$ при $x = 0$

109 $y'' + 2y' - 8y = 0,$ если $y = 4$, $y' = -4$ при $x = 0$

110 $y'' - 3y' + 2y = 0,$ если $y = 2$, $y' = 3$ при $x = 0$

Задание 12.

Используя признак д'Аламбера, исследовать на сходимость ряд:

111 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

112 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n}$

113 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$

114 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

115 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

116 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

117 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^n}$

118 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

119 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n+1}$

120 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$

Задание 13.

Используя признак Лейбница исследовать на сходимость:

121 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$

122 $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\ldots$

123 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

124 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$

125 $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\ldots$

126 $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots$

127 $1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots$

128 $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots$

129 $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$

130 $1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\frac{1}{49}+\ldots$

Задание 14.

131 Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

132 Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?

133 Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?

134 Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если можно использовать материал семи различных цветов?

135 Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?

136 Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

137 Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?

138 Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя собрания и секретаря?

139 Сколькими способами можно составить список из 6 человек?

140 Сколькими способами можно выбрать гласную букву из слова *журнал*?

Задание 15. Решите задачу.

141 В ящике с деталями оказалось 300 деталей I сорта, 200 деталей II сорта и 50 деталей III сорта. Наудачу вынимают одну из деталей. Чему равна вероятность вынуть деталь I, II или III сорта?

142 В урне находятся 20 белых и 15 черных шаров. Наудачу вынимают один шар, который оказывается белым, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар. Найдите вероятность того, что этот шар тоже окажется белым.

143 В урне находятся 7 белых и 5 черных шаров. Найдите вероятность того, что 1) наудачу вынутый шар окажется черным; 2) два наудачу вынутых шара окажутся черными.

144 Считая выпадение любой грани игральной кости одинаково вероятным, найдите вероятность выпадения грани с нечетным числом очков.

145 В ящике в случайном порядке положены 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролер берет наудачу 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окажется стандартной.

146 Вероятность попадания баскетболистом в кольцо равна 0,6. Баскетболист сделал серию из четырех бросков. Какова вероятность того, что при этом было ровно три попадания?

147 Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо 4 и 5 одновременно.

148 Рабочий обслуживает два автомата, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый автомат не потребует внимания рабочего, равна 0,8, а для второго автомата эта вероятность равна 0,7. Найдите вероятность того, что в течение часа ни один из автоматов не потребует внимания рабочего.

149 В урне находятся 6 шаров, из которых 3 белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Вычислите вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

150 В урне находятся 10 белых и 6 черных шаров. Найдите вероятность того, что три наудачу вынутых один за другим шара окажутся черными.

Задание 16.

151 Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^{10} (3x^2 + 2x + 2)\,dx$$

по формуле трапеций при $n = 10$.

152 Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^8 (3x^2 - 4x + 1)\,dx$$

по формуле трапеций при $n = 8$.

153 Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

по формуле прямоугольников при $n = 10$ с точностью до 0,01.

154 Вычислить приближенно интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

по формуле трапеций при $n = 10$ с точностью до 0,0001.

155 Вычислить приближенно интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

по формуле прямоугольников при $n = 10$ с точностью до 0,0001.

156 Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

по формуле трапеций при $n = 10$ с точностью до 0,0001.

157 Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

по формуле трапеций при $n = 8$ с точностью до 0,0001.

158 Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$$

по формуле трапеций при $n = 10$ с точностью до 0,0001.

159 Вычислить приближенно интеграл

$\int\limits_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}dx$ по формуле Симпсона $(2n = 6)$.

160 Вычислить приближенно интеграл

$\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле прямоугольников (12.1) $(n=10)$

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика: учебное пособие для ссузов – М: Издательство "Дрофа",2010г.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учебное пособие для ссузов – М: Издательство "Дрофа",2010г.
3. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования – М: ОИЦ "Академия",2011 г.
4. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учебное пособие для ссузов – М: Издательство "Дрофа",2010г.
5. Гусев В.А., Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. проф. Образования – М.: «Академия», 2010 г.
6. Спирина М.С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ.учреждений сред. проф. образования-.: «Академия», 2011 г.

Дополнительные источники:

1. Виноградов Ю.Н., Потапов В.И., Соколова В.Е. Математика и информатика. М.: Академия ,2011г.
2. Острейковский В.А. Математика. М.: Оникс, 2010г
3. Подольский В.А., Суходский А.М. Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие для техникумов. М., «Высшая школа»,1974.
4. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. – М., 2006.
5. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10кл.– М., 2006.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.- 416 с.
7. Бурков В.Н., Новиков Д.А., Элементы теории графов, методическое пособие.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – 9-е издание. – М.: Айрис-пресс, 2009.
9. Методическое пособие по курсу "Информатика" для преподавателя. Численные методы. Часть III. / Сост.: Р.Р. Гильфанова. – Наб. Челны: НГПИ, 2010. – 59 с.

Интернет-ресурсы.

1. «Математика»: учебно-методическая газета. Форма доступа:
    a. www.mat.1september.ru

2. «Квант»: журнал. Форма доступа:www.kvant.mirrorl.mccme.ru
3. Электронная библиотека. Форма доступа:www.math.ru/lib
4. «Дискретная математика» (журнал).
    a. Форма доступа://http://dma.mi.ras.ru
5. «Теория вероятностей и ее применение» (журнал). Форма доступа:www.tvp.ru
6. http://wiki.auditory.ru/Лекция4: Численное дифференцирование. Численное интегртрование.
7. http://vm.mstuca.r –теория множеств
8. http://www.aup.ru/books/m156/9.htm - теория графов